গ্যাসের আণবিক তত্ত্ব

গ্যাসের আণবিক তত্ত্ব

(KINETIC THEORY OF GASES)

শ্রীপ্রতীপকুমার চৌধুরী
এম্. এসসি. (কলিকাতা) ;
পি-এইচ. ডি. (লণ্ডন), ডি. আই. সি

WEST BENGAL ...
Acc. No. 6611
Dated 14.5.99
Call No. 533.7/1
Price ~~Page~~ Rs. 12/-

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

GYASER ANABIK TATTA

SRI PRATIP KUMAR CHAUDHURI

© West Bengal State Book Board

© পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

প্রথম প্রকাশ : মার্চ ১৯৭৯

প্রকাশক :
পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ ;
৬এ রাজা সুবোধ মল্লিক স্কোয়ার
কলিকাতা-৭০০ ০১৩।

মূল্য : বার টাকা।

মুদ্রক :
সুরেশ দত্ত।
মডার্ন প্রিণ্টার্স ;
১২ উল্টাডাঙ্গা মেন রোড ;
কলিকাতা-৭০০ ০৬৭।

প্রচ্ছদ : শ্রীকমল শেঠ।

চিত্রাঙ্কন : শিপ্রা দত্ত।

Published by PROF. PRADYUMNA MITRA, Chief Executive Officer, West Bengal State Book Board under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional language at the University level, launched by the Government of India, the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

উৎসর্গ

অগ্রজপ্রতিম

৺সলিলকুমার নাগের

স্মৃতিতে এই পুস্তক উৎসর্গিত হ'ল

ভূমিকা

পদার্থবিদ্যার শিক্ষাক্রমের মধ্যে গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের একটি বিশেষ স্থান আছে। বস্তুপুঞ্জের সামগ্রিক ধর্মের পর্য্যবেক্ষণ থেকে পদার্থবিদ্যা উত্তীর্ণ হয় বস্তুর আণবিক ও পারমাণবিক গঠনের ভিত্তিতে তার আচরণের বিশ্লেষণে। এই উত্তরণের পথে গ্যাসের আণবিক তত্ত্বই প্রথম প্রয়াস। এবং এই প্রয়াসের সাফল্য বিগতযুগের বৈজ্ঞানিককে যে প্রেরণা যুগিয়েছে' উত্তরকালে পদার্থবিদ্যার জয়যাত্রায় তার মূল্য অল্প নয়।

পদার্থবিদ্যার আরও অনেক শাখার মত আণবিক তত্ত্বের সীমানাও সুনির্দিষ্ট করা সম্ভব নয়। এমন অনেক বিষয়ের আলোচনা এই পুস্তকের মধ্যে পাওয়া যাবে না, যেগুলি যে কোনও গ্রন্থকারই গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের অন্তর্ভুক্ত করতে লুব্ধ হবেন। পুস্তকের প্রস্তাবিত আয়তন এবং সাম্মানিক স্নাতক শ্রেণীর ছাত্রদের উপযোগিতা—মোটামুটি এই দুই দিকে দৃষ্টি রেখেই পুস্তকের বিষয়সূচী নির্ধারিত হয়েছে।

আণবিক তত্ত্বের প্রাথমিক পরিচয়ের পর এই পুস্তকে আলোচিত হ'য়েছে আদর্শায়িত গ্যাসের আচরণ—অবাধপথ, গতিবেগের বণ্টন ও এগুলি থেকে উদ্ভূত গ্যাসের বিভিন্ন ধর্মাবলী। অতি অল্প চাপে গ্যাসের ধর্মের উল্লেখযোগ্য পরিবর্তন হয়। এরূপ অবস্থায় গ্যাসের আচরণ স্বতন্ত্র অধ্যায়ে বিশ্লেষিত হ'য়েছে। আদর্শায়িত গ্যাসের পর এই পুস্তকের উপজীব্য বিষয় বাস্তব গ্যাসের আচরণ। ব্রাউনীয় গতির প্রকৃত তাৎপর্য্য ব্যাপকতর হ'লেও এখানে বিষয়টির কিছুটা বিস্তৃত আলোচনা করা হ'য়েছে। গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের বিকাশে ব্রাউনীয় গতির গুরুত্বই এর কারণ। আলোচিত তত্ত্বের কয়েকটি প্রয়োগ এবং পরিশেষে গ্যাস-অণুর পরিসংখ্যান সম্বন্ধীয় কিছু প্রাথমিক আলোচনাও এই পুস্তকে সন্নিবিষ্ট হ'য়েছে।

বাংলাভাষায় বৈজ্ঞানিক পরিভাষার অভাব এই পুস্তকের রচনাকালেও অনুভূত হ'য়েছে। যে সকল পারিভাষিক শব্দ এই পুস্তকে নূতন ব্যবহৃত হয়েছে সেগুলি উপযুক্ত এবং যথার্থ বৈজ্ঞানিক ভাবদ্যোতক হয়েছে কিনা, সে বিচারের ভার পাঠকবর্গের উপর ন্যস্ত হ'ল।

গ্রন্থকার বিশেষভাবে ঋণী প্রেসিডেন্সী কলেজ পদার্থবিদ্যা বিভাগের সহকর্মীদের কাছে যাঁদের অনেকেই গ্রন্থকারের শিক্ষক বা শিক্ষকতুল্য। তাঁদের সঙ্গে বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন বিষয়ে আলোচনা এই পুস্তক রচনায় অনেক সাহায্য ক'রেছে। সর্বোপরি গ্রন্থকার বিশেষভাবে কৃতজ্ঞ পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদের কাছে—যাঁদের তত্ত্বাবধান ব্যতীত এই পুস্তক রচিত বা প্রকাশিত হ'ত না। পর্ষদের মুখ্য প্রশাসন আধিকারিক অধ্যাপক প্রদ্যুম্ন মিত্র ও মডার্ন প্রিণ্টার্সের শ্রীসুরেশ দত্ত মহাশয়ের আন্তরিক প্রচেষ্টা ব্যতীত এই পুস্তকের প্রকাশনায় অনেক বিলম্ব ঘটত। এঁ'রা দুজনেই গ্রন্থকারের ধন্যবাদার্হ।

প্রতীপকুমার চৌধুরী

সূচীপত্র

পৃষ্ঠাসংখ্যা

প্রথম অধ্যায়—আণবিক তত্ত্বের ইতিহাস ১— ৯

১ আণবিক তত্ত্বের পরিচয় ২ পদার্থের আণবিক চিত্র।

দ্বিতীয় অধ্যায়—আদর্শ গ্যাসের আচরণ ১০—২০

১ গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের প্রাথমিক অঙ্গীকার ২ আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে বিশেষ অঙ্গীকার ৩ আধার প্রাচীরে আদর্শ গ্যাস অণুর সংঘাত-সংখ্যা ৪ আদর্শ গ্যাসের চাপ ৫ আদর্শ গ্যাসের ধর্ম।

অধ্যায়—অণুর আয়তন ও অবাধপথ ২১—৩৬

১ অণুর আয়তন ২ গড় অবাধপথের তাত্ত্বিক মান নির্ণয় ৩ চাপ ও উষ্ণতার সংগে গড় অবাধপথের সম্পর্ক ৪ অবাধপথের দৈর্ঘ্যের বণ্টন ৫ ব্যবহারিক উপায়ে গড় অবাধপথের মান নির্ণয় ৬ ইলেকট্রনের গড় অবাধপথ ৭ অবাধপথের বণ্টননীতি অনুযায়ী সংঘাত-সংখ্যা ও চাপের পুনর্নিরূপণ।

চতুর্থ অধ্যায়—গ্যাস-অণুর বেগবণ্টন ৩৭—৭৪

১ স্থির অবস্থায় গ্যাস-অণুর বেগবণ্টনের বৈশিষ্ট্য ২ ম্যাক্সওয়েলের সম্ভাব্যতা প্রণালী ৩ বোল্‌ৎস্‌মানের সংঘর্ষ প্রণালী ৪ a ও α ধ্রুবকদ্বয়ের মান ও গতিবেগের গড় ৫ অণুর গতীয় শক্তির বণ্টন ৬ ব্যবহারিক উপায়ে ম্যাক্সওয়েলীয় বেগবণ্টন সূত্রের প্রতিপাদন ৭ স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা, ম্যাক্সওয়েল সূত্রে বোল্‌ৎস্‌মানের সংযোজন ও গতীয় শক্তির সমবিভাজন নীতি ৮ গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ ৯ ম্যাক্সওয়েলীয় বেগবণ্টনসূত্র অনুযায়ী গড় অবাধপথের তাত্ত্বিক মান নিরূপণ।

পঞ্চম অধ্যায়—পরিবহণ প্রক্রিয়া ৭৫—৯১

১ গ্যাসের সাম্যহীন অবস্থা ২ গ্যাসের সান্দ্রতা ৩ চাপ ও উষ্ণতার উপর গ্যাসের সান্দ্রতাঙ্কের নির্ভরশীলতা ৪ গ্যাসের তাপপরিবাহিতা ৫ চাপ ও উষ্ণতার সংগে তাপ-পরিবাহিতার সম্পর্ক ৬ গ্যাসের ব্যাপন ৭ ব্যাপনসম্বন্ধীয় পরীক্ষালব্ধ ফল এবং চাপ ও উষ্ণতার উপর ব্যাপনাংকের নির্ভরশীলতা।

ষষ্ঠ অধ্যায়—অনুভূত গ্যাসের আচরণ বৈশিষ্ট্য ৯২—১০৫

১ অতি অল্প চাপে বিভিন্ন প্রক্রিয়ার প্রকৃতিস্বাতন্ত্র্য ২ কৈশিকের মধ্যে গ্যাসের প্রবাহ ৩ নুডসেনের তত্ত্ব ৪ নিঃসরণ ৫ তাপজ নির্গমন ৬ অল্পচাপে তাপের পরিবহণ ৭ নুডসেনের নিরপেক্ষ প্রেষমান।

সপ্তম অধ্যায়—বাস্তব গ্যাস ১০৬—১২৯

১ বাস্তব গ্যাসের আচরণ ২ অ্যানড্রুজ ও আমাগাটের পরীক্ষা ৩ ভ্যানডারওয়াল্‌সের অবস্থা সমীকরণ ৪ ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণের আলোচনা ৫ পরীক্ষাদ্বারা *'a'* ও *'b'* ধ্রুবকদ্বয়ের মান নির্ণয় ৬ ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণ অনুযায়ী সন্ধি-ধ্রুবক সমূহের মান ৭ ক্লসিয়াসের ভিরিয়াল উপপাদ্য ৮ ভিরিয়াল উপপাদ্যের প্রয়োগ ৯ সন্ধি-ধ্রুবকের সাহায্যে অবস্থা সমীকরণের সংক্ষেপণ ১০ অন্যান্য অবস্থা সমীকরণ।

অষ্টম অধ্যায়—ব্রাউনীয় গতি ১৩০—১৪২

১ ব্রাউনীয় গতির প্রকৃতি ২ পেরাঁর পরীক্ষার তত্ত্বগত ভিত্তি ৩ পেরাঁর পরীক্ষার বর্ণনা ৪ রৈখিক ব্রাউনীয় গতি ৫ গ্যাসের মধ্যে রৈখিক ব্রাউনীয় গতির পর্য্যবেক্ষণ ৬ কৌণিক ব্রাউনীয় গতি।

নবম অধ্যায়—আণবিক তত্ত্বের প্রয়োগ ১৪৩—১৫৮

১ সূচনা ২ পদার্থের মেরুপ্রবণতা ৩ গ্যাসীয় আয়নের সচলতা ও ব্যাপনাংক ৪ আয়নের পুনর্মিলন।

দশম অধ্যায়—পদার্থের আণবিক পরিসংখ্যান ১৫৯—১৭৬

১ আণবিক পরিসংখ্যানের প্রয়োজনীয়তা ২ বোল্‌ৎস্‌মান উপপাদ্য—অবিন্যস্ততা ও সম্ভাব্যতার সম্পর্ক ৩ প্রাক্‌-কণিকাবাদী ও কণিকাবাদী বণ্টনসূত্র ৪ কোষসংখ্যা c_j এবং α ও β ধ্রুবকদ্বয়ের মান ৫ বিভিন্ন গ্যাসের পরিসংখ্যানগত প্রকৃতি।

পরিভাষা ১৭৭—১৭৮

গ্রন্থসূচী ১৭৯

প্রথম অধ্যায়

আণবিক তত্ত্বের পরিচয়

১·১ আণবিক তত্ত্বের পরিচয়

পদার্থ যে অসংখ্য ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র কণিকার সমষ্টি, এই সত্য বহু শতাব্দী দার্শনিকদের তত্ত্বগত ধারণার মধ্যে নিবদ্ধ ছিল। প্রাচীন ভারতের বৈশেষিক দর্শনের প্রতিষ্ঠাতা মহর্ষি কণাদ, গ্রীক দার্শনিক লিউকিপাস (Leucippus) ও তাঁর শিষ্য ডেমোক্রিটাস (Democritus) খৃষ্টপূর্ব পঞ্চম ও চতুর্থ শতাব্দীতে কোনওরকম ব্যবহারিক পরীক্ষার ভিত্তি ছাড়াই কল্পনা করতে পেরেছিলেন যে সঞ্চরণশীল অসংখ্য কণিকার সংযোগেই বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের সৃষ্টি। ডেমোক্রিটাস প্রচার করতেন "কণিকা ও শূন্যস্থান ব্যতীত আর কিছুর অস্তিত্ব নাই ; বাকী সব কিছুই মতামত মাত্র।" তবে ডেমোক্রিটাস প্রমুখ গ্রীক দার্শনিকরা এই কণিকার উপর কোন গুণই আরোপ করেন নি। তাঁরা স্বীকার করতেন শুধু পরিমাণগত পার্থক্য। এ'দের রচনায় অনুপ্রাণিত হয়েছিলেন পরবর্তী যুগের রোম্যান কবি লুক্রেশিয়াস (Lucretius)। খৃষ্টপূর্ব প্রথম শতাব্দীর এই কবির রচিত "De Natura Rerum" (পদার্থের প্রকৃতি প্রসঙ্গে) কাব্যে পদার্থের আণবিক প্রকৃতি এবং তার উপর ভিত্তি ক'রে প্রাকৃতিক ঘটনাবলীর ব্যাখ্যা উপস্থাপিত হ'য়েছে।

বৈশেষিক দর্শনে বিভিন্ন প্রকার অণুর গুণগত পার্থক্যও অনুমিত হ'য়েছে, যদিও পদার্থের মৌলিক উপাদানকে বৈশেষিকরা চিনতে পারেন নি। তাঁদের ধারণা ছিল পদার্থের মূল উপাদান ক্ষিতি বা মাটি, জল, তেজ ও বায়ু।

আশ্চর্যের বিষয় এই যে এরপর বহু শতাব্দী বিশ্বের চিন্তাশীল সমাজ এই বিষয়ের প্রতি একটুও মনোনিবেশ করেন নি। অ্যারিস্টটলের (Aristotle, খৃষ্টপূর্ব চতুর্থ শতাব্দী) মত লব্ধপ্রতিষ্ঠ দার্শনিক এই কণিকাতত্ত্বের বিরোধিতা করে গেছেন, পদার্থকে অবিচ্ছিন্ন কোন উপাদানে গঠিত ব'লে কল্পনা ক'রেছেন। ১৬৫০ থেকে ১৭০০ খৃষ্টাব্দের মধ্যে কণিকাতত্ত্বের ভাগ্য কিছুটা সুপ্রসন্ন হয়। রবার্ট বয়েল (Robert Boyle), রবার্ট হুক (Robert Hooke) ও আইজ্যাক নিউটন (Isaac Newton)—এই তিনজন ইংরাজ পদার্থবিদ্ বয়েল সূত্রের ব্যাখ্যা তৈরী করেন গ্যাসের আণবিক প্রকৃতি কল্পনা ক'রে। ১৭৩৮ খৃষ্টাব্দে প্রকাশিত

হয় সুইস্ গণিতবিদ্ বার্ণুলির (Daniel Bernoulli) "Hydrodynamics" (প্রবাহীগতিবিদ্যা)। গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের গাণিতিক ভিত্তি এই রচনাতেই প্রথম প্রতিষ্ঠিত হয়।

কিন্তু এতদুর পর্যন্ত আণবিক তত্ত্ব অগ্রসর হ'য়েছে কোন ব্যবহারিক পরীক্ষার অপেক্ষা না করেই। প্রায় ১৮০০ খৃষ্টাব্দ পর্যন্ত আণবিক তত্ত্বের প্রধান বিরোধী ছিল তাপের 'ক্যালরিক মতবাদ'। এই মতবাদ অনুযায়ী বস্তুর উষ্ণতা তার মধ্যে অবস্থিত 'ক্যালরিক' নামে এক কল্পিত প্রবাহীর পরিমাণের উপর নির্ভর করে। ঘর্ষণের ফলে বস্তুর মধ্যস্থিত ক্যালরিক নির্গত হয়, আর তার ফলেই তাপের উদ্ভব হয়। ১৭৯৮ খৃষ্টাব্দে কাউণ্ট রামফোর্ড (Count Rumford) ও ১৭৯৯ খৃষ্টাব্দে হাম্ফ্রি ডেভী (Humphry Davy) সর্বপ্রথম ক্যালরিক মতবাদের বিরুদ্ধে ব্যবহারিক প্রমাণ উপস্থাপিত করেন। রামফোর্ড দেখান, যে নিরেট ধাতুর বেলনের মধ্যে গর্ত ক'রে বন্দুকের নল তৈরীর সময় যে পরিমাণ তাপ উৎপন্ন হয় তা ব্যয়িত শক্তির সঙ্গেই সমানুপাতী। ক্যালরিক মতবাদ অনুযায়ী এই তাপ যে পরিমাণ ধাতু চেঁছে বার করা হয় তার সংগেই সমানুপাতী হওয়া উচিত, ব্যয়িত শক্তির সঙ্গে তার সম্পর্ক থাকার কথা নয়। কাজেই রামফোর্ডের পরীক্ষার ফল ক্যালরিক মতবাদের সম্পূর্ণ বিরোধী। ক্যালরিক মতবাদীরা বিশ্বাস করতেন দুই বস্তুর ঘর্ষণের ফলে যে বস্তুর উৎপত্তি হয় তার চেয়ে প্রাথমিক বস্তুদ্বয়ের অন্তর্গত ক্যালরিকের পরিমাণ বেশী হবে। ১৭৯৯ খৃষ্টাব্দে ডেভী দেখান যে দুইখণ্ড বরফ ঘর্ষণের ফলে জলে রূপান্তরিত হয়। যেহেতু জলের মধ্যে ক্যালরিকের পরিমাণ বরফের চেয়ে বেশী ব'লে সকলেই বিশ্বাস করতেন, ক্যালরিক মতবাদ পুনরায় এক অনতিক্রম্য বাধার সম্মুখীন হ'ল।

ইতিমধ্যে রাসায়নিক গবেষণাগারেও অনেক অগ্রগতি হ'য়েছে। উনবিংশ শতাব্দীর প্রথম দশকেই জন ড্যাল্টন (John Dalton) পদার্থের রাসায়নিক ক্রিয়ার পর্যবেক্ষণ থেকে পদার্থের আণবিক গঠন আবিষ্কার করেন। ১৮১১ খৃষ্টাব্দে ইট্যালীয় বৈজ্ঞানিক আভোগাড্রো (Avogadro) তাঁর প্রখ্যাত প্রকল্প প্রকাশ করেন।

১৮৪০ খৃষ্টাব্দে ম্যাঞ্চেস্টারে জেম্স্ প্রেস্কট জুল (James Prescott Joule) ব্যয়িত শক্তি ও উৎপন্ন তাপের অনুপাত সূক্ষ্মভাবে নির্ণয়ের জন্য পরীক্ষা শুরু করেন। জুলের পরীক্ষার ফলে এই অনুপাতের নিত্যতা স্বীকৃত হয় এবং তাপ যে শক্তির এক প্রকাশমাত্র, এই সত্য সর্বজনগৃহীত হয়। এই অবস্থাতেই পদার্থের অন্তর্নিহিত তাপশক্তিকে অণুসমূহের গতীয়শক্তি রূপে

কল্পনা করা দুরূহ ছিল না। এমন কি জুল নিজেই ১৮৫১ খৃষ্টাব্দে এক গবেষণাপত্রে আণবিক গতির ভিত্তিতে গ্যাসের চাপ তত্ত্বগতভাবে নির্ণয় করেন। এর অব্যবহিত পরেই ১৮৫৭ খৃষ্টাব্দে দুই জার্মান পদার্থবিদ্, ক্লসিয়াস (Clausius) ও ক্রনিগ্ (Crönig) স্বতন্ত্রভাবে গ্যাসের আণবিক তত্ত্বকে পরীক্ষালব্ধ ফলের ভিত্তিতে প্রতিষ্ঠিত করেন। জুল, ক্লসিয়াস ও ক্রনিগকে গ্যাসের আধুনিক আণবিক তত্ত্বের জনক হিসাবে ধরা যেতে পারে।

গ্যাসের এই আধুনিক আণবিক তত্ত্ব অনুযায়ী পদার্থমাত্রই অসংখ্য অতিক্ষুদ্র অণুদ্বারা গঠিত। অণুসমূহ সর্বদাই সঞ্চরমান এবং তাদের গতির অসংবদ্ধ (random) অংশের ফলে যে গতীয় শক্তির উদ্ভব হয় তাই তাপশক্তিরূপে প্রতীয়মান হয়। অণুসমূহের সংবদ্ধ গতি (mass motion) পদার্থের যৌথগতি উৎপন্ন করে, যার সঙ্গে তাপশক্তির কোন সম্পর্ক নেই। অণুসমূহের অসংবদ্ধ গতি যত বৃদ্ধি পায়, পদার্থের উষ্ণতা তত অধিক বলে অনুভূত হয়।

পরবর্তী কালের পদার্থবিদ্‌রা আণবিক তত্ত্বের সাহায্যে পদার্থের বহু ধর্মের সন্তোষজনক ব্যাখ্যা দিতে সক্ষম হন। লর্ড কেলভিন (Lord Kelvin) নিরপেক্ষ তাপমাত্রার উদ্ভাবন করেন ১৮৪৮ খৃষ্টাব্দে। এরপর আসেন ম্যাক্সওয়েল (Maxwell) ও বোল্‌ৎস্‌মান (Boltzmann)। ১৮৬০ খৃষ্টাব্দে ম্যাক্সওয়েল নির্ধারণ করেন গ্যাস-অণুর গতিবেগের বণ্টনসূত্র, এবং এর পরেই বোল্‌ৎস্‌মান ম্যাক্সওয়েল সূত্রের ব্যাপকতর প্রয়োগ প্রচলিত করেন। তবু বিভিন্ন ক্ষেত্রে সাফল্য সত্ত্বেও আণবিক তত্ত্বকে বিরুদ্ধ সমালোচনার সম্মুখীন হ'তে হয়, যার প্রধান কারণ অণুর অস্তিত্বের ও তাদের সঞ্চরণশীলতার প্রত্যক্ষ প্রমাণের অভাব। বিরোধীদলের প্রধান ছিলেন ওস্ট্‌ওয়াল্ড (Ostwald)। তাঁর মত ছিল এই যে তাপগতিবিদ্যাই (Thermodynamics) সমস্ত প্রাকৃতিক ঘটনার ব্যাখ্যা দিতে সক্ষম এবং পদার্থের গঠন-সম্পর্কিত কোনও অপ্রমাণিত প্রকল্পের উপস্থাপন একেবারেই নিষ্প্রয়োজন।

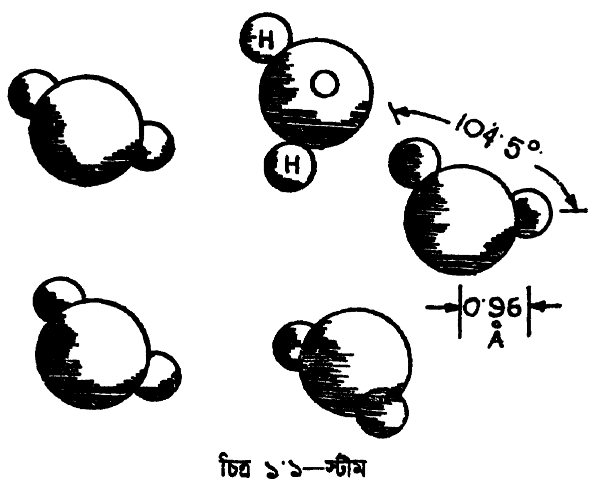
কিন্তু সব ইতিহাসের মত পদার্থবিদ্যার ইতিহাসেও উত্থান-পতনের দৃষ্টান্তের অভাব নেই। ১৯০৮ এ এমন ঘটনা ঘটল যে স্বয়ং ওস্ট্‌ওয়াল্ডও আণবিক তত্ত্বে বিশ্বাসী হ'য়ে পড়লেন। ইতিপূর্বে ১৮২৭ এ বৃটিশ উদ্ভিদবিদ্ রবার্ট ব্রাউন (Robert Brown) অণুবীক্ষণের সাহায্যে জলের মধ্যে বিলম্বিত সূক্ষ্ম রেণুর এক অদ্ভুত অনিয়মিত গতি লক্ষ্য করেছিলেন। ১৯০৪—০৫ খৃষ্টাব্দে আইনস্টাইন (Einstein) ও স্মলুকভ্‌স্কি (Smoluchowski) এই গতির পরিসংখ্যানমূলক তত্ত্বপ্রকাশ করেন। ১৯০৮ এ জ্যঁ পেরাঁর (Jean Perrin)

পরীক্ষায় এই তত্ত্বের সত্যতা সম্পূর্ণরূপে প্রতিষ্ঠিত হয় এবং সেই সঙ্গে আণবিক গতির সম্পর্কে শেষ সন্দেহও দূরীভূত হয়।

ইতিহাসের পর্যালোচনা আমাদের এখানেই শেষ। গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের মূল বিষয়ে প্রবেশের পূর্বে এই অধ্যায়ে আমরা পদার্থের আণবিক চিত্রের সংগে কিছুটা পরিচয় লাভ করব। পরবর্তী অধ্যায়সমূহে গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের ক্রমবিকাশ ও বিভিন্ন ক্ষেত্রে তার প্রয়োগ আলোচিত হবে।

১·২ পদার্থের আণবিক চিত্র

কল্পনা করা যাক্, আমরা কোন এক অতিশক্তিশালী অণুবীক্ষণের সাহায্যে পদার্থকে ১০^{৮} গুণ বিবর্ধিত ক'রে দেখতে পারি। স্টীমপূর্ণ এক আধারের মধ্যে এই যন্ত্রের সাহায্যে দৃষ্টিপাত করা যাক। আমরা হয়ত আধারের অতি ক্ষুদ্র অংশই দেখতে পাব। এই দৃশ্য কতকটা চিত্র ১·১ এর মত দেখাবে। চিত্রে যদিও পাঁচটি জলের অণু দেখা যাচ্ছে, মনে রাখতে হবে, এই বিবর্ধনে সাধারণ অবস্থায় এক ঘন-মিটার আয়তনের মধ্যে মাত্র ২০-২৫টি অণু দেখা যাবে। অণুবীক্ষণের দৃষ্টিক্ষেত্রে অনেকসময় একটিও অণু দেখা যাবে না।



চিত্র ১·১—স্টীম

জলের এই অণুগুলি মোটেই স্থির নয়। তারা অবিরাম চতুর্দিকে সরলরেখায় ধাবিত হয় এবং অনবরতই পরস্পরের সংগে অথবা আধারের গাত্রের সংগে তাদের সংঘর্ষ হয়। প্রতি সংঘর্ষে তাদের গতিবেগের দিক ও

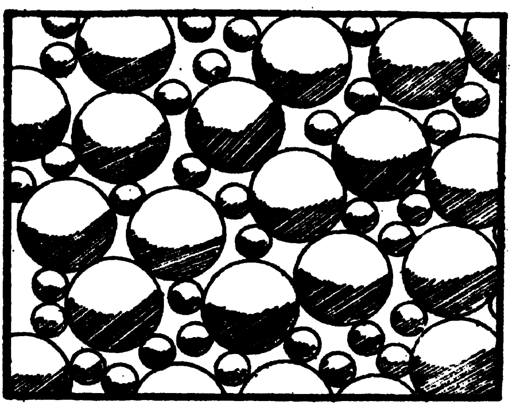
মাত্রার পরিবর্তন ঘটে।* কল্পনা করা যাক্ যে স্টীমের আধারটি একটি বেলন ও তার মধ্যে একটি পিস্টন লাগানো আছে। পিস্টনগাত্রের সঙ্গে সংঘর্ষের ফলে অণুগুলি পিস্টনকে বাইরের দিকে ঠেলে সরিয়ে দিতে চায়। ঐ পিস্টনকে যথাস্থানে রাখার জন্য বাইরের থেকে তার ওপর বল প্রয়োগ প্রয়োজন। অণুগুলি যখন পিস্টন থেকে প্রতিফলিত হয় তখন তাদের ভরবেগের দিক পরিবর্তন ঘটে। ভরবেগের এই পরিবর্তন অণুগুলির উপর আধারগাত্র-প্রযুক্ত বল দ্বারাই সাধিত হয় এবং এই বল পিস্টনগাত্রের ক্ষেত্রফলের সমানুপাতী। পিস্টনকে স্বস্থানে বিদ্যমান রাখতে এর ওপর প্রতি একক ক্ষেত্রফলে যে বল প্রয়োগ করতে হয় তাকেই স্টীমের চাপ বলে অনুভব করা যায়।

এখন যদি কোনও উপায়ে আধারমধ্যস্থ স্টীমের উষ্ণতা বৃদ্ধি পায় তবে এই অণুগুলির কিরূপ পরিবর্তন লক্ষ্য করা যাবে? আমরা যদি অণুগুলির গতিবেগের কোনরকম গড় আগেই নির্ণয় ক'রে রাখতাম তাহলে দেখা যেত এই গড় গতিবেগের মান বৃদ্ধি পেয়েছে। পিস্টনের সংগে অণুগুলির সংঘর্ষ এখন আরও জোর হবে এবং পিস্টনকে ধ'রে রাখতে আরও বেশী বলের প্রয়োজন হবে। অর্থাৎ, উষ্ণতাবৃদ্ধির সংগে স্টীমের চাপও বৃদ্ধি পাবে।

ধরা যাক্ যে আধারের প্রাচীর যে পদার্থে নির্মিত তা তাপের সম্পূর্ণ অপরিবাহী। এই অবস্থায় বলপ্রয়োগ ক'রে পিস্টনকে ক্রমশঃ ভিতর দিকে ঠেলে স্টীমের আয়তন কমিয়ে আনা যাক্। পিস্টন যে সময় ভিতর দিকে প্রবেশ করছে সেই সময় যে সমস্ত অণুর পিস্টনের সংগে সংঘর্ষ হবে, পিস্টন থেকে প্রতিফলনের পর তাদের গতিবেগ কিছুটা বর্ধিত হবে। ক্রিকেট ব্যাট যখন সামনের দিকে চালনা করা হয় তখন যদি ব্যাট ও বলে সংঘর্ষ হয়, তখন সংঘর্ষের পর বল বর্ধিত গতিতে বিপরীত দিকে ছুটে যায়। স্টীম অণুগুলির ক্ষেত্রেও অনুরূপ ঘটনা ঘটে। মোটের উপর, কিছু সময় ধ'রে স্টীমের আয়তন কমিয়ে আনার পর দেখা যাবে অণুগুলির গড় গতিবেগ কিছুটা বৃদ্ধি পেয়েছে। যে প্রক্রিয়ার বর্ণনা দেওয়া হ'ল, পদার্থ বিদ্যার ভাষায় তার নাম "রুদ্ধতাপ সংনমন" (adiabatic compression)। স্পষ্টতঃই, এই প্রক্রিয়ায় স্টীমের উষ্ণতা বৃদ্ধি পাবে। এর বিপরীত প্রক্রিয়ায়, অর্থাৎ রুদ্ধতাপ প্রসারণে উষ্ণতা হ্রাসপ্রাপ্ত হবে।

* সমান ভর ও বেগের মাত্রাবিশিষ্ট দুই অণুর সংঘর্ষের ক্ষেত্রে অবশ্য গতিবেগের দিকই পরিবর্তিত হয়, মাত্রা নয়।

স্টীমের উষ্ণতা যদি ক্রমশঃ কমিয়ে আনা যায়, তবে অণুগুলির গতি ক্রমশঃ হ্রাসপ্রাপ্ত হবে এবং অবশেষে দেখা যাবে যে অণুগুলি পরস্পরের সঙ্গে সংলগ্ন হ'তে চাইছে। এই আচরণের মূল কারণ অনুসন্ধান করা যাক্। দুইটি অণু যখন পরস্পর থেকে যথেষ্ট দূরে অবস্থান করে তখন তাদের মধ্যে কোন পারস্পরিক বল ক্রিয়া করে না। কিন্তু যখন তারা খুব নিকটবর্তী হয় তখন তাদের মধ্যে এক অল্পশক্তির আকর্ষণী বলের উদ্ভব হয়, বৈদ্যুতিক আধানের মধ্যে কুলম্ব (coulomb) প্রতিক্রিয়াই যার উৎস। দুইটি অণু যখন পরস্পর সংলগ্ন হয় অর্থাৎ তাদের ইলেকট্রন-মেঘগুলি পরস্পরকে ভেদ করার উপক্রম করে তখন অবশ্য এই আকর্ষণী বলের চেয়ে অনেক বেশী শক্তিশালী এক বিকর্ষণ দেখা যায় যার ফলে অণুদ্বয় আর অধিকতর নিকটবর্তী হয় না। দুই অণুর সংঘর্ষকালে যদি তাদের গতীয় শক্তি যথেষ্ট বেশী হয়, তখন তারা অতি সহজেই পূর্বোল্লিখিত আকর্ষণী বলকে কাটিয়ে উঠতে পারে। অবশ্য এক্ষেত্রে ঐ গতীয় শক্তি মাপতে হবে অণুদ্বয়ের যৌথ ভরকেন্দ্রিক নির্দেশাংকে—যে নির্দেশাংকে অণুদ্বয়ের যৌথ ভরকেন্দ্র নিশ্চল থাকে। হ্রাসপ্রাপ্ত উষ্ণতায়, উল্লিখিত গতীয় শক্তির স্বল্প মানে এই আকর্ষণ অণুগুলিকে ক্রমশঃ পরস্পরের সংগে সংলগ্ন ক'রে এক ঘনীভূত বস্তুপুঞ্জের সৃষ্টি করে। এই বস্তুপুঞ্জই স্টীমের তরলাবস্থা বা জল (চিত্র ১·২)।



চিত্র ১·২—জল

জলের মধ্যে প্রতিটি অণুই তার সমীপবর্তী অন্যান্য অণুগুলির আকর্ষণী বলের প্রভাবের মধ্যে থাকে। অণুগুলির মধ্যে ফাঁক খুবই কম, যার ফলে জলের ঘনত্ব স্টীমের চেয়ে বহুগুণ বেশী। তরলের আয়তনের মধ্যে

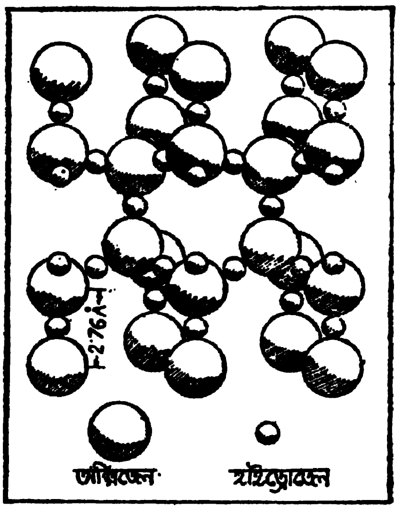
অণুগুলি অন্যান্য অণুগুলির পাশ কাটিয়ে যথেচ্ছভাবে বিচরণ করতে পারে। কিন্তু যখনই কোন একটি অণু তরলের সীমানায় উপনীত হয়, তার নিকটবর্তী অণুগুলির মোট আকর্ষণী বল তাকে তরলের ভিতর দিকে আকৃষ্ট করে। এই আকর্ষণই তরলের বস্তুপুঞ্জকে একত্র রাখে এবং তরলের পৃষ্ঠস্থ অণুর সংখ্যা যতদূর সম্ভব কম রাখার চেষ্টা করে। তরলের পৃষ্ঠ এর ফলে সর্বদা সঙ্কুচিত হ'তে চায়, যার প্রত্যক্ষ ফল তরলের **পৃষ্ঠটান** (surface tension)।

তরলের প্রতিটি অণুর গতীয় শক্তি অবশ্য এক নয়। কোন কোন অণুর গতীয় শক্তি এত বেশী হ'য়ে যাওয়া সম্ভব যে তারা তরলের অন্যান্য অণুর আকর্ষণ ছিন্ন ক'রে বেরিয়ে যেতে পারে। এইভাবে নিয়তই তরলের পৃষ্ঠ থেকে কিছু সংখ্যক অণু নির্গত হতে থাকে যাকে আমরা বলি তরলের **বাষ্পীভবন**। বাষ্পীভবনের ফলে তরলের যে অণুগুলি নির্গত হয় তাদের প্রতিটিই গড় গতীয় শক্তির চেয়ে অনেক বেশী গতীয় শক্তি বহন করে। ফলে তরলের অবশিষ্ট অণুগুলির গতীয় শক্তির গড় আগের চেয়ে কম হয় এবং তরলের উষ্ণতা পূর্বের চেয়ে কম বলে অনুভূত হয়। পদার্থবিদ্যায় উষ্ণতার এই হ্রাসকে **"লীন-তাপ"** এর সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হয়।

তরল যদি কোন উন্মুক্ত আধারে থাকে, তাহলে বাষ্পরূপে নির্গত অণুগুলি বাইরের বায়ুর সংঙ্গে মিশে যাবে এবং যতক্ষণ না তরল নিঃশেষিত হয়, বাষ্পীভবন চলতেই থাকবে। কিন্তু যদি তরলের আধার বদ্ধ থাকে তবে ঐ অণুগুলি তরলের উপরস্থ মুক্তস্থানে জমা হতে থাকবে এবং সাধারণ গ্যাস-অণুর মতই বিচরণ করবে। এই অবস্থায় বাষ্পের কিছু অণু তরলের পৃষ্ঠেও পতিত হবে এবং পুনরায় তরলের মধ্যে প্রবেশ করবে। এই প্রক্রিয়াকেই বলা হয় বাষ্পের **ঘনীভবন**। বাষ্পের মধ্যে নির্দিষ্ট আয়তনে অণুর সংখ্যা যত বৃদ্ধি পাবে ঘনীভবনের হারও তত বেশী হবে। অবশেষে এমন অবস্থার সৃষ্টি হবে যখন প্রতি সেকেণ্ডে যতগুলি অণু বাষ্পীভূত হবে ততগুলিই বাষ্প থেকে পুনরায় তরলে প্রবেশ করবে। এই অবস্থায় বাষ্পীভবনের মোট হার শূন্য হবে অর্থাৎ আমরা তরলসংলগ্ন বাষ্পকে **"সম্পৃক্ত"** (saturated) ব'লে অভিহিত করব।

জলের উষ্ণতা এবার আরও কমানো যাক্। দেখা যাবে জলের অণুগুলির যথেচ্ছ বিচরণ ক্রমশঃ কমে আসছে। অবশেষে এক আশ্চর্য ঘটনা লক্ষিত হবে। অণুগুলি পরস্পরের গায়ে লেগে এক সুবিন্যস্ত ত্রিমাত্রিক সারি রচনা করবে (চিত্র ১.৩)। এই সুবিন্যস্ত সারির নাম **কেলাস** (crystal)। জলের উষ্ণতা

কমিয়ে যা পাওয়া গেল তার নাম জলের কঠিন অবস্থা বা বরফ। কেলাসের মধ্যে প্রতিটি অণুর একটি নির্দিষ্ট স্থান আছে। অণুগুলি এই নির্দিষ্ট স্থানে সন্নিবিষ্ট থাকলেও তাদের কিছুটা তাপীয় গতিশক্তি বিদ্যমান থাকে, যার ফলে নির্দিষ্ট সাম্যবিন্দুর চতুর্দিকে অণুগুলির কম্পন লক্ষিত হয়। উষ্ণতার



চিত্র ১.৩—বরফের কেলাস

বৃদ্ধির সংগে এই কম্পন বৃদ্ধি পায়, এমনকি এক বিশেষ উষ্ণতায় অণুগুলি নিজস্ব স্থান ত্যাগ ক'রে কেলাসকে তরলে পরিণত করে। ঐ বিশেষ উষ্ণতাই কঠিন পদার্থের গলনাংক। অপর দিকে উষ্ণতা যত হ্রাস পায় কেলাসিত অণুর কম্পন তত কমে। অবশেষে সর্বনিম্ন উষ্ণতা অর্থাৎ নিরপেক্ষ শূন্যের (absolute zero) নিকটে উপনীত হ'লে অণুগুলির কম্পনের পরিমাণও নিম্নতম হয়।

বরফের কেলাসের কিছু বৈশিষ্ট্য আছে। লক্ষ্য করলে দেখা যাবে এর গড়ন কতকটা ত্রিভুজাকৃতি ভূমির উপর গঠিত পিরামিড বা টেট্রাহেড্রনের (tetrahedron) মত। কেলাসটির গঠনে ত্রিকোণিক প্রতিসাম্য (trigonal symmetry) বর্তমান এবং এর ফলেই তুষারকণার ষট্‌কোণী আকৃতির উদ্ভব হয়। এছাড়া কেলাসটির অভ্যন্তরে কিছু ফাঁক বা শূন্যস্থানও দেখা যাবে। জলের মধ্যে এই শূন্যস্থান অনেক কম থাকে, যার ফলে তরল জলের ঘনত্ব বরফের চেয়েও কিছুটা বেশী হয়। অবশ্য বেশীর ভাগ পদার্থের কেলাসেই অণুগুলি তরলের তুলনায় বেশী ঘনসন্নিবিষ্ট থাকে এবং কঠিন কেলাসের ঘনত্ব

তরলের চেয়ে অধিক হয়। জলকেই বরং এই ব্যাপারে ব্যতিক্রম বলা যেতে পারে।

মোটামুটিভাবে, জল এবং তার গ্যাসীয় ও কঠিন অবস্থা—স্টীম ও বরফের রূপ আমরা প্রত্যক্ষ করলাম। এই রূপ অনেকটা আদর্শায়িত এবং অতি-সরলীকৃত। পরীক্ষাগারে ব্যবহৃত কোন জলই সম্পূর্ণ বিশুদ্ধ হয় না। তার মধ্যে অক্সিজেন, নাইট্রোজেন প্রভৃতির অণু দ্রবীভূত অবস্থায় থাকে। বহু রাসায়নিক যৌগও জলের মধ্যে থাকতে পারে, যথা সাধারণ-লবণ। দ্রবীভূত অবস্থায় অণুগুলির কিছু অংশ বিভক্ত হ'য়ে তাড়িতাহিত আয়নরূপেও থাকতে পারে। এই সমস্ত অবিশুদ্ধতা জলের আচরণে নানা জটিলতা আনয়ন করে, যা আমরা বর্তমান আলোচনার গণ্ডীর বাইরে রেখেছি। পদার্থের আণবিক চিত্রে নানা রাসায়নিক প্রক্রিয়ার ব্যাখ্যাও অনুসন্ধান করা যেতে পারে যা থেকে আমরা বিরত থাকব।

সৃষ্টির প্রতি রহস্যময় প্রক্রিয়া—সুদূর নীহারিকার অভ্যন্তরে নক্ষত্রের জন্ম থেকে জীবের মস্তিষ্কের কোষাগারে স্মৃতির সংরক্ষণ—এর সব কিছুই অণু-পরমাণুর বিচিত্র লীলার প্রকাশ মাত্র। সীমাহীন সম্ভাবনাময় পথে প্রথম দু চারটি পদক্ষেপই এই পুস্তকের উপজীব্য বিষয়।

দ্বিতীয় অধ্যায়

আদর্শ গ্যাসের আচরণ

২.১ গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের প্রাথমিক অঙ্গীকার

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আণবিক তত্ত্বে গ্যাসের যে চিত্র কল্পনা করা হয় তার বর্ণনা দেওয়া হ'য়েছে। গ্যাসের আচরণের গাণিতিক বিশ্লেষণ করতে হ'লে তার প্রকৃতি সম্পর্কে কিছু অঙ্গীকার করা প্রয়োজন। যে কোনও বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য প্রাথমিক অঙ্গীকারগুলি লিপিবদ্ধ হ'ল ঃ

১। গ্যাস মাত্রেই বহু সংখ্যক অণুর সমষ্টি এবং কোনও এক প্রকার গ্যাসের প্রতিটি অণুই সদৃশ।

২। গ্যাসের অণুগুলি সর্বদাই সঞ্চরণশীল। কিন্তু যেহেতু অণুর সংখ্যা অতিমাত্রায় বৃহৎ, অণুর গতি সত্ত্বেও সাম্যাবস্থায় গ্যাসের মধ্যস্থ প্রতি বিন্দুতে একক আয়তনে অণুর সংখ্যা একই থাকে। এই সংখ্যাকে অণুর 'ঘনত্বসংখ্যা' বলা হবে।

৩। আধারের প্রাচীর ও অন্যান্য অণুর সংগে অণুগুলির নিয়তই সংঘর্ষ হয়। সংঘর্ষকালে অণুগুলি কঠিন স্থিতিস্থাপক গোলকের মত আচরণ করে। ফলে প্রাচীরের সংগে সংঘর্ষে কোন অণুর গতীয় শক্তি পরিবর্তিত হয় না। দুই অণুর মধ্যে সংঘর্ষে উভয়ের গতীয় শক্তির যোগফল সমান থাকে। কোন অণুর উপর্য্যুপরি দুই সংঘর্ষের মধ্যে যে সময় অতিবাহিত হয় তার তুলনায় কোন সংঘর্ষের স্থিতিকাল উপেক্ষণীয়। অর্থাৎ প্রতিটি সংঘর্ষই নিমেষে সংঘটিত হয় ব'লে কল্পনা করা যায়।

৪। সংঘর্ষের মুহূর্ত ব্যতীত অন্য সময় কোন অণুর উপর কোন বল কাজ করে না। অর্থাৎ অণুগুলির মধ্যে কোনও পারস্পারিক বল ক্রিয়া করলেও ঐ বল অতি স্বল্প পাল্লার। অণুগুলি যেহেতু নিউটনের গতিসূত্র মেনে চলে, দুই সংঘর্ষের মধ্যবর্তী সময়ে প্রতিটি অণু সমবেগে সরলরেখায় ধাবিত হয়।

৫। গ্যাস অণুগুলির কাছে সব দিকই সমান, কোন দিকেরই কোন বৈশিষ্ট্য নেই। অর্থাৎ গ্যাসের সমগ্র আয়তনটিকেই 'সমদৈশিক' (isotropic) হিসাবে গণ্য করা যায়।

এই অঙ্গীকারগুলির মধ্যে প্রথম দুইটির সত্যতা বহু পরীক্ষার মাধ্যমে পরোক্ষ ও প্রত্যক্ষভাবে প্রতিপন্ন হ'য়েছে। সাম্যাবস্থায় সাধারণ ভাবে গ্যাসের প্রতি বিন্দুতে ঘনত্বসংখ্যা এক হ'তেই হবে। পঞ্চম অধ্যায়ে দেখা যাবে যে অন্যথায় ব্যাপনের ফলে গ্যাসের মধ্যে সামগ্রিক গতির উদ্ভব হবে এবং তার ফলে অবশেষে প্রতি বিন্দুতে ঘনত্বসংখ্যা সমান হবে।

গ্যাস-অণুর স্থিতিস্থাপকতা সংক্রান্ত অঙ্গীকারটি একপরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে সর্বতোভাবে প্রযোজ্য। দুই বা ততোধিক পরমাণুবিশিষ্ট গ্যাস অণুর বেলায় কোন সংঘর্ষের ফলে অণুর ঘূর্ণন বা কম্পনজনিত গতীয় শক্তির হ্রাসবৃদ্ধি ঘটতে পারে। তবে প্রতি সংঘর্ষে রৈখিক গতীয় শক্তির গড় পরিবর্তন অবশ্যই শূন্য হবে। কেননা কোন তাপনিরোধক আধারে রক্ষিত গ্যাসের অণুগুলির ঘূর্ণন বা কম্পনজনিত শক্তির হ্রাস বা বৃদ্ধির ফলে যদি তাদের রৈখিক গতীয় শক্তির যথাক্রমে বৃদ্ধি বা হ্রাস ঘটে, তবে ঐ গ্যাসের চাপও নিজে নিজেই ক্রমশঃ বাড়তে বা কমতে থাকবে। এরূপ ঘটনা আমাদের বাস্তব অভিজ্ঞতার বিরোধী এবং এই অর্থে গ্যাস অণুর সংঘর্ষকে স্থিতিস্থাপক বলা যেতে পারে।

গ্যাস অণুকে কঠিন গোলকরূপে কল্পনা অপেক্ষাকৃত অধিক সমালোচনা-সাপেক্ষ। প্রথমতঃ কোন অণুকে তখনই গোলকরূপে কল্পনা করা সমীচীন যখন তাদের প্রযুক্ত বল থেকে জাত সমবিভব তলগুলি (equipotential surfaces) গোলকাকৃতি। কোন কোন নিষ্ক্রিয় গ্যাসের একপরমাণুক অণু ব্যতীত অন্যান্য ক্ষেত্রে এই সর্ত কার্যকরী হয় না। দ্বিতীয়তঃ কোন অণুই বাস্তবিকভাবে 'কঠিন' পদার্থের মত আচরণ করতে পারে না। দুই অণুর ইলেকট্রন—মেঘ যখন পরস্পরকে ভেদ করতে উদ্যত হয় তখন এক অতি-শক্তিশালী বিকর্ষণী বলের উদ্ভব হয়। অণু দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব যদি r হয় এবং এই বিকর্ষণী বলকে যদি $\frac{1}{r^n}$ এর সমানুপাতী বলে ধরা যায় তবে n-এর ব্যবহার্য মান 13 থেকে 15 হয়। দুই অণুর সংঘর্ষকালে তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ভর করে। প্রথমতঃ অণুদ্বয়ের ভরকেন্দ্রিক নির্দেশাংকে তাদের গতীয় শক্তির উপর এবং দ্বিতীয়তঃ তাদের সংঘাত-পরামিতির (impact parameter) উপর। কিন্তু দূরত্ব r কমার সংগে বিকর্ষণী বল থেকে উদ্ভূত বিভব এত দ্রুত বৃদ্ধি পায় যে বিভিন্ন অবস্থায় r এর সর্বনিম্ন মানের খুব বেশী প্রভেদ হয় না। এই কারণে এবং গ্যাস-অণুকে কঠিক গোলকরূপে কল্পনা করলে গাণিতিক বিশ্লেষণে যে সুবিধা হয় তার জন্য আমরা আলোচ্য অঙ্গীকারটিকে মেনে নেব। দুই সদৃশ অণুর বিভিন্ন আপেক্ষিক কৌণিক অবস্থান ও বিভিন্ন আপেক্ষিক

গতির জন্য তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের সর্বনিম্ন ব্যবধানের গড় মানকেই আমরা ঐ অণুর ব্যাস মনে করব।

এই প্রসঙ্গে উল্লেখযোগ্য যে দুই অণুর মধ্যে অপেক্ষাকৃত দূরপাল্লার বলও বর্তমান থাকে। দুই অণুর মধ্যে মহাকর্ষজ বল এই প্রকৃতির। তবে এই বল এত অল্প শক্তির যে সাধারণ অবস্থায় তাপীয় গতিশক্তির তুলনায় দুই অণুর মহাকর্ষজ বিভব উপেক্ষা করা যায়। সাধারণ তাপে দুইটি হিলিয়াম অণুর তাপীয় গতিশক্তির সঙ্গে তারা যখন পরস্পরকে স্পর্শ করে সেই সময় তাদের মহাকর্ষজ স্থৈতিক শক্তির তুলনা করা যাক। 27°C বা 300°K উষ্ণতায় প্রতিটি অণুর তাপীয় গতিশক্তি ($\frac{3}{2}kT$, k = বোলৎসমান ধ্রুবক, T = নিরপেক্ষ উষ্ণতা) প্রায় 6×10^{-14} আর্গ। এই অণুর ব্যাস প্রায় 2·3Å (ভ্যানডার-ওয়াল সমীকরণের b ধ্রুবক থেকে নির্ধারিত) এবং ভর $6{\cdot}7\times10^{-24}$ গ্র্যাম। কেন্দ্রদ্বয়ের ব্যবধান যখন 2·3Å তখন তাদের মহাকর্ষজ স্থৈতিক শক্তির পরিমাণ $\left(G\,.\,\frac{m^2}{r},\ G = \text{মহাকর্ষ ধ্রুবক},\ m = \text{অণুর ভর}\right)$ $1{\cdot}3\times10^{-46}$ আর্গ, যা অবশ্যই তাপীয় শক্তির তুলনায় উপেক্ষণীয়। কোন কোন ক্ষেত্রে অণুগুলি বৈদ্যুত-দ্বিমেরু বিশিষ্ট হয়, যার উদাহরণ জল, অ্যামোনিয়া প্রভৃতির অণু। এই প্রকার দুইটি অণুর মধ্যে r^{-4}-এর সমানুপাতী এক বল ক্রিয়া করে এবং তার ফলে তাদের স্থৈতিক শক্তির প্রকৃতি আরও জটিল হয়। আমরা ধরে নেব যে rএর যে লঘিষ্ঠ মানের জন্য দূর পাল্লার স্থৈতিক শক্তি অণুর তাপীয় গতিশক্তির তুলনায় উপেক্ষণীয় হবে, তা অণুগুলির গড় অবাধপথের তুলনায় অতি ক্ষুদ্র।

গ্যাসের আয়তনের মধ্যে অসমদৈশিকতা (anisotropy) সৃষ্টির সবচেয়ে সাধারণ কারণ অভিকর্ষ। যদি গ্যাসের আধারের উচ্চতা h, অভিকর্ষজ ত্বরণ g হয়, তবে যে কোনও গ্যাসের ক্ষেত্রে mgh রাশির মান তাপীয় গতিশক্তি 6×10^{-14} আর্গের সংগে তুলনীয় হ'লে তবেই অসমদৈশিকতা দৃশ্যমান হবে। $h = 1$ মিটার হ'লে হিলিয়ামের ক্ষেত্রে $mgh = 6{\cdot}6\times10^{-19}$ আর্গ। এই মান 6×10^{-14} আর্গের তুলনায় উপেক্ষণীয় হওয়ায় সাধারণ অবস্থায় ঐ গ্যাসকে সমদৈশিক ধ'রে নেওয়া চলে। সমগ্র বায়ুমণ্ডলের ক্ষেত্রে h এর মান এত অধিক যে অভিকর্ষের প্রভাব মোটেই উপেক্ষণীয় নয়। এইরূপ অবস্থায় অভিকর্ষের প্রভাব পরে আলোচিত হবে।

২.২ আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে বিশেষ অঙ্গীকার

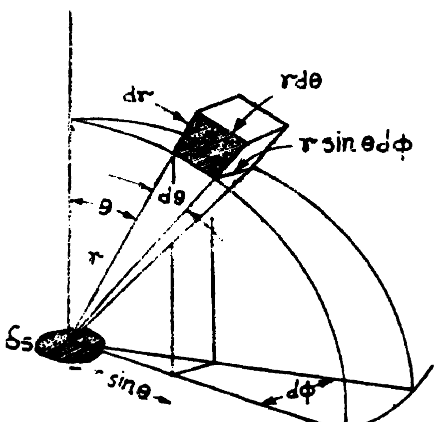
পূর্ববর্তী অংশে যে প্রাথমিক অঙ্গীকারগুলি উল্লিখিত হ'ল তার থেকে

গ্যাসের এক সরলীকৃত চিত্র পাওয়া যায়। বিশ্লেষণের সুবিধা হেতু আমরা দ্বিতীয় পর্যায়ে আরও কয়েকটি অঙ্গীকার স্বীকার করব। সেগুলি হল :

১। গ্যাসের অণুগুলির আয়তন উপেক্ষণীয়, অর্থাৎ অণুগুলি বিন্দুভর মাত্র।

২। গ্যাসের অণুগুলির পরস্পরের মধ্যে বা আধার প্রাচীর ও অণুগুলির মধ্যে (প্রাচীর ও অণুর মধ্যে সংঘর্ষকাল ব্যতীত) কোন বলই কাজ করে না অর্থাৎ অণুগুলির শক্তির কোন অংশই স্থৈতিক নয়।

যে গ্যাস এই সর্তগুলি পালন করে তাকে 'আদর্শ গ্যাস' (perfect gas) বলা হয়। কোন বাস্তব গ্যাসই সর্বাবস্থায় আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করে না। তবে যথেষ্ট উচ্চ উষ্ণতায় এবং অল্প চাপে সকল গ্যাসের আচরণই আদর্শ গ্যাসের মত হয়। কারণ, প্রথমতঃ অল্প চাপে গ্যাস অণুর অবাধ পথ অণুর ব্যাসের তুলনায় এত বড় হয় যে অণুগুলির আয়তনকে উপেক্ষা করা চলে। দ্বিতীয়তঃ, অণুগুলির তাপীয় গতিশক্তি অধিক হ'লে তুলনায় অল্প স্থৈতিক শক্তির কোন প্রভাব থাকে না।



চিত্র ২.১—গোলীয় নির্দেশতন্ত্র

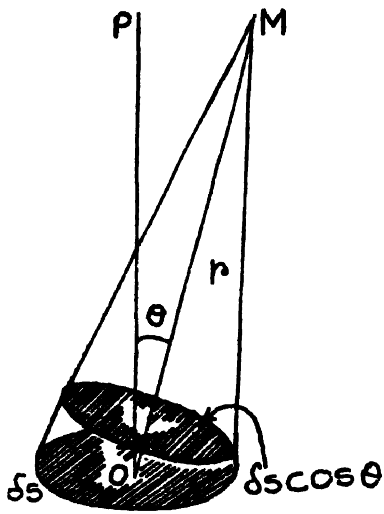
পূর্ণ আদর্শতার কল্পনা থেকে অবশ্য অনেক অবাস্তবতার সূত্রপাত হয়। আদর্শ গ্যাসে অন্তরণুক সংঘর্ষ ঘটে না। এই অবস্থায় ভিন্ন উষ্ণতায় দুইটি গ্যাস মিশ্রিত হ'লেও তাদের মধ্যে তাপের আদান-প্রদান ঘটতে পারে না। গ্যাসের সান্দ্রতা, তাপপরিবাহিতা প্রভৃতি ধর্মের ব্যাখ্যাও 'আদর্শ' গ্যাসের ক্ষেত্রে দেওয়া যায় না।

২.৩ আধার প্রাচীরে আদর্শ গ্যাস অণুর সংঘাত-সংখ্যা

ধরা যাক কোন আধারের মধ্যে গ্যাসের অণুর ঘনত্বসংখ্যা n, প্রতি অণুর ভর m ও গতিবেগ c। আধারের প্রাচীরে δs ক্ষেত্রফলের এক অতি ক্ষুদ্র সমতল কল্পনা করা যাক (চিত্র ২.১)। ধরা যাক OP δs তলের উপর লম্ব। OPকে অক্ষ হিসাবে ধরে এক গোলীয় নির্দেশতন্ত্র (r, θ, ϕ) স্থির করা যাক। এই নির্দেশতন্ত্রে ব্যাসার্ধ r ও $r+\delta r$, নতাংশ θ ও $\theta+\delta\theta$ এবং দিগংশ ϕ ও $\phi+\delta\phi$ এর মধ্যে প্রায় আয়তফলকাকৃতি যে আয়তন আবদ্ধ হবে তার তিন ধারের দৈর্ঘ্য δr, $r\delta\theta$ এবং $r \sin \theta\delta\phi$। এখানে δr অতি ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্যাংশ এবং $\delta\theta$ ও $\delta\phi$ অতি ক্ষুদ্র কোণ। আয়তফলকের মোট আয়তন

$$\delta v = r^2 \sin \theta \, \delta\theta \, \delta r \, \delta\phi \qquad 2.3.1$$

এই আয়তনের মধ্যে যে কোনও মুহূর্তে $n\delta v$ সংখ্যক অণু থাকবে এবং গ্যাসের সমদৈশিকতা হেতু তাদের গতিবেগের দিক চারিদিকে সমভাবে বিন্যস্ত থাকবে। δv আয়তনের অন্তর্গত যে কোনও বিন্দু M (চিত্র ২.২) এর সংগে δs তলে O বিন্দুকে যোগ করা যাক। দৈর্ঘ্য $OM=r$ এবং $\angle POM=\theta$।



চিত্র ২.২

সুতরাং δs ক্ষেত্রফল M বিন্দুতে $\dfrac{\delta s \cos \theta}{r^2}$ ঘনকোণ উৎপন্ন করে। তখন

$n\delta v$ সংখ্যক অণু চতুর্দিকের 4π ঘনকোণে সমভাবে ধাবিত হ'লে δs তল অভিমুখে ধাবিত অণুর সংখ্যা হবে

$$\delta n = \frac{n\delta v\ \delta s \cos\theta}{4\pi r^2} \qquad 2.3.2$$

যদি $r \leqslant c \triangle t$ হয় তবে এই δn সংখ্যক অণু $\triangle t$ সময়ের মধ্যে δs তলকে আঘাত করবে। সুতরাং $\triangle t$ সময়ের মধ্যে δs তলে মোট সংঘাতের সংখ্যা

$$\int_{r=0}^{c\triangle t}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{ndv\ \delta s \cos\theta}{4\pi r^2}$$

[θ এর উর্ধ্বসীমা এখানে $\pi/2$ কেননা কেবলমাত্র δs তলের উপরস্থ অর্ধ-গোলক থেকেই কোন অণু এসে δs কে আঘাত করতে পারে]

$$= \frac{n\delta s}{4\pi}\int_{r=0}^{c\triangle t} dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\ d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{nc}{4}\ \delta s\ \triangle t$$

অর্থাৎ আধারগাত্রের একক ক্ষেত্রফলে একক সময়ে আঘাতকারী অণুর সংখ্যা $\frac{nc}{4}$ ।

প্রকৃতপক্ষে গ্যাস-অণুর প্রতিটির গতি এক নয়। একক আয়তনে c_1 গতিবিশিষ্ট n_1 অণু, c_2 গতিবিশিষ্ট n_2 অণু ইত্যাদি বিদ্যমান এবং এইভাবে অসংখ্য মানের গতিবিশিষ্ট অণু থাকা সম্ভব। n যদি অণুর মোট ঘনত্বসংখ্যা হয় তবে $n = \sum_i n_i$ এবং অণুগুলির গড় গতিবেগ $\bar{c} = \frac{1}{n}\sum_i n_i c_i$ । আধারগাত্রের একক ক্ষেত্রফলে একক সময়ে আঘাতকারী অণুর মোট সংখ্যা বা

$$\text{অণুর সংঘাত সংখ্যা } N_c = \frac{1}{4}\sum n_i c_i = \frac{n\bar{c}}{4} \qquad 2.3.3$$

২.৪ আদর্শ গ্যাসের চাপ

ইতিপূর্বে ২.৩.২ সূত্রে δv আয়তনে অবস্থিত ও δs তল-অভিমুখে ধাবিত অণুর সংখ্যা নির্ধারিত হ'য়েছে। এই অণুগুলির প্রতিটি mc ভরবেগের সংগে δs তলকে আঘাত করে এবং স্থিতিস্থাপক গোলকের ন্যায় প্রতিফলিত হয়। প্রতিফলনের ফলে ভরবেগের স্পার্শিক (tangential) উপাংশ $mc \sin\theta$ অপরিবর্তিত থাকে। কিন্তু অভিলম্ব (normal) উপাংশ $mc\cos\theta$ দিক পরিবর্তন ক'রে $-mc\cos\theta$ তে পরিণত হয়। মোট পরিবর্তন $2mc\cos\theta$ δs তল কর্তৃক অণুটির উপর প্রযুক্ত আবেগের দ্বারাই সংঘটিত হয়। স্বভাবতঃই অণুটিও δs তলের উপর সমপরিমাণ আবেগ প্রয়োগ করে। δn সংখ্যক অণু কর্তৃক প্রযুক্ত মোট আবেগ $\delta n \,.\, 2mc\cos\theta$।

সুতরাং পূর্বের মত $\triangle t$ সময়ে প্রযুক্ত মোট আবেগ

$$\int 2mc\cos\theta \,.\, ndv \,.\, \frac{\delta s\cos\theta}{4\pi r^2}$$

$$=\frac{n\delta s}{4\pi}\,.\,2mc\int_{r=0}^{c\triangle t} dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$=\tfrac{1}{3}\, mnc^2\, \delta s \,.\, \triangle t$$

যদি পূর্বের মত গ্যাস-অণুর গতিবেগের বিভিন্নতা কল্পনা করা যায় এবং একক আয়তনে c_i গতিবেগবিশিষ্ট অণুর সংখ্যা n_i ধরা যায় তবে δs তলে $\triangle t$ সময়ে প্রযুক্ত আবেগ হবে $\frac{1}{3} m\delta s\triangle t \sum n_i c_i^2$। এই নিরত প্রযুক্ত আবেগ আধারগাত্রে যে চাপ সৃষ্টি করে, ধরা যাক তার মান P। সেক্ষেত্রে δs তলে $\triangle t$ সময়ে মোট প্রযুক্ত আবেগ $P\delta s\,\triangle t$। অতএব

$$P\,\delta s\,\triangle t = \tfrac{1}{3}\, m\,\delta s\,\triangle t \sum_i n_i c_i^2$$

$$\text{বা}\quad P = \tfrac{1}{3}\, m \sum_i n_i c_i^2$$

গতিবেগের বর্গের গড় মান বা 'গড়বর্গবেগ' $=\overline{c^2}=\frac{1}{n}\sum_i n_i c_i^2$ এবং গ্যাসের ঘনত্ব $\rho = mn$। সুতরাং

$$P = \tfrac{1}{3} mn\overline{c^2} = \tfrac{1}{3}\rho\overline{c^2} \qquad 2.4.1$$

সংঘাতসংখ্যা ও চাপের গণনা $\triangle t$ এর যে কোনও মানের জন্যই প্রযোজ্য। প্রশ্ন উঠতে পারে যে আধারের পরিসর অপেক্ষা $c\triangle t$ বড়' হলে এই গণনা ঠিক থাকে কিনা। মনে রাখতে হবে যে আধারের প্রাচীর অণুগুলিকে সম্পূর্ণরূপে প্রতিফলিত করে। δs তলে অবস্থিত কোন পর্যবেক্ষকের কাছে আধারের প্রাচীর আয়নার মত কাজ করে এবং আধারের আয়তন পর্যবেক্ষকের কাছে অসীম বলে মনে হয়।

2.4.1 সূত্র থেকে সহজেই দেখা যায় যে যদি কোনও নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের আয়তন V ও অণুর সংখ্যা N হয় তবে

$$PV = \tfrac{1}{3}\, mnV\overline{c^2} = \tfrac{1}{3}\, mN\overline{c^2}$$

এই N সংখ্যক অণুর মোট গতীয় শক্তি $E = N \cdot \tfrac{1}{2}\, m\overline{c^2}$, সুতরাং

$$PV = \tfrac{2}{3}E \qquad 2.4.2$$

এক গ্র্যাম-অণু গ্যাসের ক্ষেত্রে অণুর মোট গতীয় শক্তিকে গ্যাসের 'আভ্যন্তরীণ শক্তি' (internal energy) বলা হয়। 'আভ্যন্তরীণ শক্তিকে U এবং এক গ্র্যাম-অণু গ্যাসের আয়তনকে V_0 দ্বারা চিহ্নিত ক'রে লেখা যায়:

$$PV_0 = \tfrac{2}{3}U \qquad 2.4.3$$

২.৫ আদর্শ গ্যাসের ধর্ম

2.4.1 সূত্রের মধ্যেই আদর্শ গ্যাসের সূত্রগুলি নিহিত আছে। এই অংশে সেগুলির আলোচনা করা যাক।

ড্যাল্টনের আংশিক চাপ সূত্র:

কোন আধারের মধ্যে যদি অনেক প্রকার গ্যাসের মিশ্রণ থাকে এবং তাদের অণুর ভর m, ঘনত্ব সংখ্যা n এবং গড়বর্গবেগ $\overline{c^2}$ 1, 2, 3···ইত্যাদি পাদাংক দ্বারা চিহ্নিত হয়, তবে δs তলে $\triangle t$ সময়ে মোট প্রযুক্ত আবেগ হবে

$$\tfrac{1}{3}m_1 n_1 \overline{c_1^2}\,\delta s\triangle t + \tfrac{1}{3}m_2 n_2 \overline{c_2^2}\,\delta s\triangle t + \ldots\ldots$$
$$= \tfrac{1}{3}\delta s\triangle t \sum_i m_i n_i \overline{c_i^2}$$

এই রাশি পূর্বের মত $p\delta s\triangle t$ এর সমান, সুতরাং

$$P = \tfrac{1}{3}\sum_i m_i n_i \overline{c_i^2}$$

কিন্তু i-তম গ্যাসের স্বতন্ত্রভাবে প্রযুক্ত চাপ $P_i = \tfrac{1}{3}m_i n_i \overline{c_i^2}$।

$$\therefore \quad P = \sum_i p_i \qquad 2.5.1$$

অর্থাৎ গ্যাসের মিশ্রণের মোট চাপ তাদের স্বতন্ত্রভাবে প্রযুক্ত 'আংশিক চাপ-গুলির যোগফলের সমান। এই নিয়মকেই ড্যাল্টনের আংশিক-চাপ-সূত্র বলা হয়।

উষ্ণতার ধারণা ও আভোগাড্রো সূত্র ঃ

ধরা যাক্ দুইটি গ্যাস আলাদাভাবে একই চাপে আছে। 1 ও 2 পাদাংক দ্বারা গ্যাস দুইটির অণুর ভর ইত্যাদিকে চিহ্নিত করলে 2.4.1 সূত্র থেকে

$$p = \frac{1}{3} m_1 n_1 \overline{c_1^2} = \frac{1}{3} m_2 n_2 \overline{c_2^2}$$

অথবা $n_1 \epsilon_1 = n_2 \epsilon_2$ 2.5.2

এখানে ϵ_1 ও ϵ_2 দুই প্রকার গ্যাস অণুর গড় গতীয় শক্তি। ϵ_1 ও ϵ_2 প্রত্যক্ষভাবে মাপা হয় না। ϵ_1 ও ϵ_2 এর সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত যে ভৌত রাশি ব্যবহারিক উপায়ে পরিমাপযোগ্য তা গ্যাসের উষ্ণতা।

দুইটি গ্যাসের উষ্ণতা সমান বলতে বোঝানো হয় যে যখন গ্যাস দুইটি পরস্পরের সংস্পর্শে আসে তখন তাদের অণুগুলির মধ্যে কোন গতীয় শক্তির আদানপ্রদান ঘটে না, দুইটি গ্যাসই সাম্যাবস্থায় থাকে। দুই প্রকার গ্যাসের অণুর সংঘর্ষের ফলে মোট গতীয় শক্তির আদানপ্রদান তখনই শূন্য হয় যখন $\epsilon_1 = \epsilon_2$ হয়। (২.২ অংশে উল্লিখিত হ'য়েছে যে প্রকৃত আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে অন্তণরুক সংঘর্ষ ঘটে না এবং সেহেতু গতীয় শক্তির আদানপ্রদানও হ'তে পারে না। এখানে এই অবাস্তবতাকে উপেক্ষা করা হ'ল।) 2.5.2 সূত্রের সাহাযে এখন লেখা যায়

$n_1 = n_2$ 2.5.3

অর্থাৎ দুই গ্যাসের ঘনত্বসংখ্যা সমান। যে কোনও দুই গ্যাসের উপরই এই সূত্র প্রযোজ্য সুতরাং বলা যায় যে 'সমান চাপ ও উষ্ণতায় যে কোনও গ্যাসের ঘনত্বসংখ্যা একই।' এই নিয়মই **আভোগাড্রো সূত্র**। প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায়, অর্থাৎ 760 টর চাপে (1 টর = 1 মিলিমিটার পারদস্তম্ভের চাপ) ও বরফের গলনাংকে n এর মান প্রতি ঘন সেণ্টিমিটারে $2{\cdot}687 \times 10^{19}$। এই সংখ্যাকে **লশ্‌মিট্‌ সংখ্যা** (Loschmidt number) বলা হয় ;

বয়েল সূত্র ঃ

যদি কোন গ্যাসের সংনমন বা প্রসারণের সময় তার উষ্ণতা সমান রাখা যায় তবে পূর্বের ধারণা অনুযায়ী অণুগুলির গড় গতীয় শক্তি ϵ অপরিবর্তিত থাকবে। N সংখ্যক অণুর গতীয় শক্তি $E = N\epsilon$, সুতরাং E এর মানও স্থির থাকবে। 2.4.2 সূত্র থেকে এখন লেখা যায়

$pv =$ ধ্রুবক 2.5.4

p ও v এর এই সম্পর্ককেই বয়েল সূত্র বলা হয়।

এ পর্যন্ত আমরা উষ্ণতার হ্রাসবৃদ্ধির বিষয়ে চিন্তা করিনি। রামফোর্ড,

জুল ইত্যাদির পরীক্ষায় প্রমাণিত হয়েছে যে পদার্থ কর্তৃক গৃহীত গতীয় শক্তিই তাপীয় শক্তিতে পরিণত হয় এবং পদার্থের উষ্ণতা বৃদ্ধি পায়। E বা $N\epsilon$, যা N সংখ্যক গ্যাস অণুর মোট গতীয় শক্তি, তার সংগে ঐ গ্যাসের উষ্ণতা নিশ্চয়ই জড়িত হবে। উষ্ণতার পরিমাপের জন্য **তাপমাত্রার** (scale of temperature) কল্পনা করা হয় এবং গ্যাসের উষ্ণতা স্থির করার জন্য এমন কোন বস্তুর সংগে ঐ গ্যাসের তাপীয় সাম্য আনতে হয় যার কোন পরিমেয় ধর্ম উষ্ণতাবৃদ্ধির সংগে পরিবর্তিত হয়। এমন বস্তুর উদাহরণ সাধারণ পারদ তাপমান (thermometer) যার মধ্যে পারদের আয়তন উষ্ণতাবৃদ্ধির সংগে বৃদ্ধি পায় এবং ঐ বৃদ্ধি সহজেই মাপা যায়। কিন্তু এই উপায়ে উষ্ণতা মাপার অসুবিধা আছে। পারদের আয়তন বৃদ্ধি উষ্ণতা বৃদ্ধির সংগে নিয়মিতভাবে হয় কিনা তা আমাদের অজ্ঞাত। ফলে "পারদ তাপমাত্রা" পারদের ধর্মের উপর নির্ভরশীল হবে। কোন বিশেষ পদার্থের ধর্মের উপর নির্ভরশীল নয় এরূপ নিরপেক্ষ তাপমাত্রা গঠনের এইজন্যই প্রয়োজন।

এই অবস্থায় আদর্শ গ্যাসকেই তাপমিতিক পদার্থ হিসাবে ব্যবহার করা সুবিধাজনক। গ্যাস-অণুর গড় গতীয় শক্তি ϵ-কে আদর্শগ্যাস তাপমাত্রায় উষ্ণতা T এর সমানুপাতী বলে ধরা যাক। বস্তুতঃ আমরা R ধ্রুবকের সংজ্ঞা এমনভাবে নির্দিষ্ট করি যাতে 2.4.3 সূত্রে

$$PV_0 = \tfrac{2}{3}U = RT \qquad 2.5.5$$

হয়। এই 'R' কে বলা হয় **গ্যাস-ধ্রুবক**। আভ্যন্তরীণ শক্তি U কে $N_0\epsilon$ (N_0 = এক গ্রাম-অণু গ্যাসে অণুর সংখ্যা বা আভোগাড্রো সংখ্যা) রূপে লিখলে

$$\epsilon = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_0} \cdot T = \frac{3}{2}\ kT \qquad 2.5.6$$

পাওয়া যায়। এখানে $\frac{R}{N_0}$ বা k 'বোল্‌ৎস্‌মান ধ্রুবক' নামে পরিচিত। 2.5.6 সূত্র থেকে ϵ ও T এর সমানুপাতিত্ব সহজবোধ্য হবে।

আদর্শ-গ্যাস-তাপমাত্রা T এর শূন্য সহজেই নির্দিষ্ট হয়। 2.5.5 সূত্রানুযায়ী যে উষ্ণতায় PV_0 এর মান শূন্য হবে তাকেই আদর্শ-গ্যাস-তাপমাত্রার শূন্য বলা হবে। বাস্তবে এই উষ্ণতায় পৌঁছানো সম্ভব নয় এবং এর অনেক অধিক উষ্ণতায় সমস্ত গ্যাস তরলে রূপান্তরিত হয়। তবে বহির্মূল্যায়নের (extrapolation) সাহায্যে এই উষ্ণতার অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

R (এবং সেইসঙ্গে k) এর মান নির্দিষ্ট করার জন্য শূন্য ব্যতীত অপর কোন নির্দিষ্ট অবস্থাতে T এর মান স্থির করা প্রয়োজন। প্রমাণ চাপে বরফের গলনাংককে এই হিসাবে 273°·16 বলা যাক। R এর মান এইভাবে নির্দিষ্ট হ'লে আদর্শ গ্যাস তাপমাত্রাও নির্দিষ্ট হয় কেননা 'PV_0' এর পরিমাপ ক'রে যে কোন অবস্থায় T এর মান নির্ণয় করা যায়। এই তাপমাত্রাকে 'কেলভিন তাপমাত্রা'ও বলা হয় এবং এইভাবে নির্দিষ্ট তাপমাত্রার ডিগ্রীকে বলা হয় 1° K বা এক ডিগ্রী কেলভিন। 273·16 রাশিটিকে বেছে নেওয়ার কারণ এই যে প্রমাণ চাপে বরফের গলনাংক থেকে জলের স্ফুটনাংকের প্রভেদ এই তাপমাত্রায় 100° হয়। বরফের গলনাংক বা 273·16° K কে 0° এবং জলের স্ফুটনাংক বা 373·16° K কে 100° ধরলে যে তাপমাত্রা পাওয়া যায় তাই আমাদের দৈনন্দিন জীবনে ব্যবহৃত সেণ্টিগ্রেড বা সেলসিয়াস (celsius) তাপমাত্রা।

তাপগতিবিদ্যায় দেখা যায় যে প্রত্যাবর্তক (reversible) এঞ্জিনের ধর্ম ব্যবহার ক'রে এক নিরপেক্ষ তাপমাত্রার শূন্যকে এবং দুইটি বস্তুর উষ্ণতার অনুপাতকে নির্দিষ্ট করা যায়। এক্ষেত্রেও প্রমাণ চাপে বরফের গলনাংক ও জলের স্ফুটনাংকের প্রভেদকে 100° ধরা হয় এবং তার ফলে যে নিরপেক্ষ তাপগতিক তাপমাত্রা (Thermodynamic scale of temperature) পাওয়া যায় তা পূর্বের আদর্শ-গ্যাস-তাপমাত্রা থেকে অভিন্ন।

গ্যাস-ধ্রুবক 'R' এর পরীক্ষালব্ধ মান প্রতি গ্র্যাম অণু পিছু 8·317 Joule/°K। আভোগাড্রো সংখ্যার মান $6{\cdot}0247\times10^{23}$ (32 গ্র্যাম O_2^{16} গ্যাসে অণুর সংখ্যা) ধরে বোল্ৎস্‌মান ধ্রুবকের মান পাওয়া যায় $1{\cdot}3805\times10^{-23}$ Joule/°K।*

অণুর গড় গতীয় শক্তি

$$\tfrac{1}{2}m\overline{c^2}=\epsilon=\tfrac{3}{2}kT \quad (\text{ 2.5.6 সূত্র থেকে })$$

হ'লে 2.4.1 সূত্র থেকে চাপের মান পাওয়া যায়

$$P=nkT \qquad 2.5.7$$

2.5.6 সূত্র থেকে অণুর মূল গড় বর্গ বেগের মানও পাওয়া যায়:

$$\sqrt{\overline{c^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}} \qquad 2.5.8$$

* অধুনা ব্যবহৃত C^{12} মানে $N_0=6.0225\times10^{23}$ (12 গ্র্যাম C_{12}এর অণুর সংখ্যা), $R=8{\cdot}3143$ Joule/°K।

তৃতীয় অধ্যায়

অণুর আয়তন ও অবাধপথ

৩.১ অণুর আয়তন

বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে অণুর আয়তনকে উপেক্ষা করা চলে না। প্রত্যক্ষ-ভাবে অণুর আয়তনের পরিমাপ সম্ভবপর না হ'লেও নানা পরোক্ষ উপায়ে এই আয়তনের কিছুটা ধারণা পাওয়া যায়। মনে রাখা প্রয়োজন যে কোয়াণ্টাম-তত্ত্ব অনুযায়ী অণুর কোন নির্দিষ্ট সীমানা নেই, সুতরাং কোন নির্দিষ্ট আয়তনও নেই। 2.1 অংশে অণুকে যে অর্থে কঠিন গোলকরূপে কল্পনা করা হয়েছে এখানে সেই অর্থেই ঐ গোলকের আয়তন সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

অণুর ব্যাস নির্ণয়ের একটি সরল উপায় তরলের মধ্যে অণুগুলি যতদূর সম্ভব ঘনসন্নিবদ্ধ অবস্থায় থাকে ব'লে কল্পনা করা। সমান মাপের অনেকগুলি গোলককে সর্বনিম্ন আয়তনের মধ্যে রাখার উপায় সেগুলিকে চতুস্তলক বিন্যাসে (Tetrahedral packing) সজ্জিত করা। এই প্রকার বিন্যাসে পরস্পর স্পর্শকারী চারিটি অণুর কেন্দ্র এক চতুস্তলকের (Tetrahedron) চার শীর্ষে অবস্থিত থাকে। এবং σ ব্যাসের প্রতিটি অণু $\frac{8}{3\sqrt{15}}\sigma^3$ আয়তন দখল ক'রে থাকে (চিত্র ৩.১)। কিন্তু তরলের ঘনত্ব ρ ও আণবিক ভর M হ'লে প্রতি অণুর অধিকৃত আয়তন $\frac{M}{N_0\rho}$ এর সমান। দুই মানের সমতা থেকে পাওয়া যায়

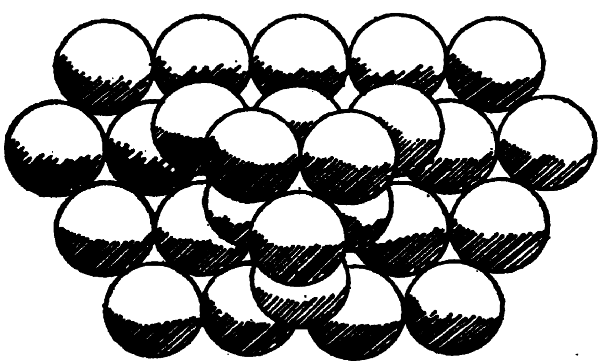
$$\left[\frac{3\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{M}{N_0\rho}\right]^{\frac{1}{3}} \qquad 3.1.1$$

বিভিন্ন গ্যাসের তরল অবস্থায় ঘনত্ব থেকে 3.1.1 সূত্রের সাহায্যে নির্ধারিত অণুর ব্যাসের মান ৩.১ সারণীতে দেখানো হ'ল। অণুর ব্যাস আরও কয়েকটি উপায়ে নির্ণয় করা যায়, যথা ভ্যান-ডার-ওয়ালস্ অবস্থা সমীকরণের b ধ্রুবক থেকে বা গ্যাসের সান্দ্রতার মান থেকে। বিভিন্ন উপায়ে নির্ণীত মানগুলির মধ্যে অল্প পার্থক্য থাকলেও মোটামুটিভাবে সমস্ত সাধারণ গ্যাসের অণুর ব্যাসই কয়েক Å এককের (10^{-8} cm.) সমান।

গ্যাস	আণবিক ভর M	ঘনত্ব ρ (তরল অবস্থায়) (gm/CC)	উষ্ণতা T $(^\circ C)$	অণুর ব্যাস σ $(\mathring{A})$
H_2	2·016	·089	−267	3·79
N_2	28·02	1·035	−269	4·03
O_2	32·00	1·460	−253	3·75
Cl_2	70·91	2·030	−160	4·38
He	4·003	·120	4·22 °K	4·32
Ne	20·18	1·442	−268	3·23
A	39·94	1·656	−233	3·87
Kr	83·80	3·000	−188	4·07
H_2O	18·02	1·000	4	3·52

৩.১ সারণী—চতুস্তলক বিন্যাস থেকে অণুর ব্যাস

অণুর অনুপেক্ষণীয় আয়তনের প্রত্যক্ষ ফল গ্যাস অণুর নিয়ত পারস্পরিক সংঘর্ষ। দুই সংঘর্ষের মধ্যে কোন অণু সরলরেখায় যে পথ অতিক্রম করে তার



চিত্র ৩.১—চতুস্তলক বিন্যাস

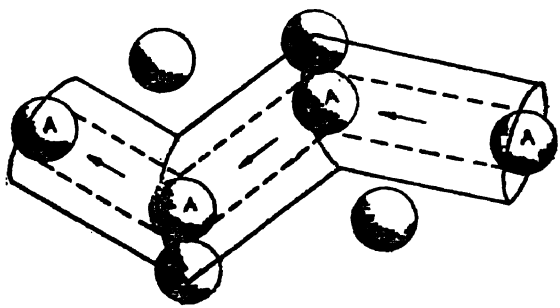
নাম "অবাধ পথ" (free path)। একটি বিশেষ অণু উপর্য্যুপরি যে সকল অবাধ পথ অতিক্রম করে তাদের গড়কেই ঐ বিশেষ অণুর "গড় অবাধ পথ"

(mean free path) বলা হয়। যদি একাধিক আকারের অণু একত্রে অবস্থান করে তবে গড় অবাধ পথের মান বিভিন্ন প্রকার অণুর ক্ষেত্রে বিভিন্ন হবে।

৩.২ গড় অবাধ পথের তাত্ত্বিক মান নির্ণয়

ধরা যাক কোন গ্যাসের মধ্যে অণুর ঘনত্বসংখ্যা n এবং প্রতিটির ব্যাস σ। এদের কোন একটিকে A নামে চিহ্নিত করা হ'ল। আমরা A অণুটির গড় অবাধ পথের মান নির্ণয় করব।

A অণুর নিজস্ব গতিবেগকে u এবং অন্যান্য অণুর তুলনায় A অণুর গড় আপেক্ষিক গতিবেগকে v বলা যাক্। কল্পনা করা যেতে পারে যে অন্যান্য নিশ্চল অণুর মধ্য দিয়ে A অণুটি v গতিতে ধাবিত হ'চ্ছে। অন্য যে কোনও অণুর সংগে যখন A অণুর সংঘর্ষ হয় তখন দুই অণুর কেন্দ্র পরস্পর থেকে σ দূরত্বে থাকে। A অণুর সংগে সমকেন্দ্রিক σ ব্যাসার্ধের এক গোলক কল্পনা করা যাক। এই গোলক যখন A অণুর সংগে v গতিবেগে ধাবিত হবে তখন $\pi\sigma^2$ প্রস্থচ্ছেদের এক বেলনাকৃতি আয়তন এই গোলক দ্বারা অতিক্রান্ত হবে। ঐ আয়তনের মধ্যে যদি অন্য কোন অণুর কেন্দ্র অবস্থিত থাকে তবে সেই অণুর সংগে A অণুর সংঘর্ষ হবে, ফলে A অণুর গতিবেগের দিক পরিবর্তিত হবে (চিত্র ৩.২)। A অণুর সমকেন্দ্রিক σ ব্যাসার্ধের যে গোলক কল্পনা করা হ'য়েছে তাকে A অণুর 'প্রভাব গোলক' (Sphere of influence) বলা হয়।



চিত্র ৩.২

অন্যান্য অণুর তুলনায় এই প্রভাবগোলক Δt সময়ে $v\Delta t$ পথ অতিক্রম করে। এই সময়ে প্রভাবগোলকের অতিক্রান্ত আয়তন $\pi\sigma^2 . v\Delta t$। এই আয়তনে গড়ে $n . \pi\sigma^2 . v\Delta t$ সংখ্যক অণু থাকে। সুতরাং Δt সময়ে A অণুর সমসংখ্যক সংঘর্ষ হবে। কিন্তু Δt সময়ে A অণুর প্রকৃত গতিপথের

দৈর্ঘ্য $u\Delta t$। সুতরাং দুই সংঘর্ষের মধ্যে A অণুর গড় অতিক্রান্ত দৈর্ঘ্য বা গড় অবাধপথ $\lambda = \frac{u\Delta t}{n \,.\, \pi\sigma^2 \,.\, v\Delta t} \quad \frac{u}{\pi n\sigma^2}$ 3.2.1

এর মান

প্রাথমিক পদ্ধতি ঃ বিশ্লেষণের সুবিধার জন্য ধরা যাক A অণুর গতিবেগ C এবং অন্যান্য অণুর গতিবেগ C এর তুলনায় উপেক্ষণীয়। এই অবস্থায়

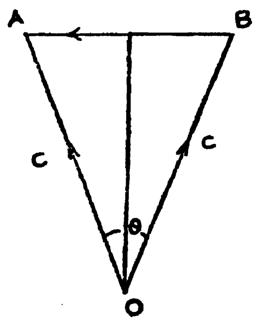
$$u = v = C \qquad 3.2.2$$

3.2.1 সূত্রে এই মান ব্যবহার ক'রে দেখা যায়

$$\lambda = \frac{1}{\pi n\sigma^2} \qquad 3.2.3$$

এই পদ্ধতি সাধারণ গ্যাসের ক্ষেত্রে বাস্তবানুগ না হ'লেও বিশেষ ক্ষেত্রে, যথা গ্যাসের মধ্যে উচ্চগতিসম্পন্ন ইলেকট্রনের গড় অবাধ পথ নির্ণয়ে এই পদ্ধতি উপযোগী। ৩.৬ অংশে এ সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে।

ক্লসিয়াসের পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতিতে প্রতি অণুর গতিবেগই C ধরা হয়। এক্ষেত্রে $u=C$। v-এর মান নিম্নলিখিত উপায়ে বার করা যায়। ধরা যাক্ ভেক্টর OA এবং OB যথাক্রমে A অণু এবং অন্য কোন অণু B এর গতিবেগ বোঝায় (চিত্র ৩.৩)। উভয়ের দৈর্ঘ্যই C এর সমান এবং θ তাদের

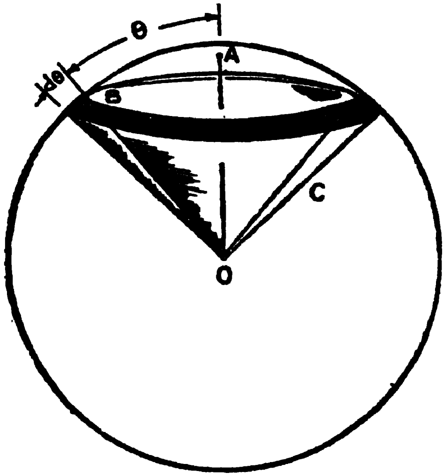


চিত্র ৩.৩

অন্তর্গত কোণ। B এর তুলনায় A অণুর আপেক্ষিক গতিবেগ BA ভেক্টরের সমান। এই গতিবেগের মান$=BA$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য

$$=2C \sin\frac{\theta}{2}\text{।}$$

θ কোণের বিভিন্ন মানের জন্য এই রাশির গড় নির্ণয় করতে θ এর বণ্টনসূত্র জানা প্রয়োজন। O বিন্দুকে কেন্দ্র ক'রে C ব্যাসার্ধের এক গোলক কল্পনা



চিত্র ৩.৪

করা যাক। A ও B বিন্দুদ্বয় এই গোলকের উপর অবস্থিত হবে (চিত্র ৩.৪)। A বিন্দুকে স্থির ধরলে B বিন্দু গ্যাসের সমদৈশিকতা হেতু গোলকের তলে যে কোন স্থানে সমান সম্ভাব্যতায় অবস্থিত হ'তে পারে। OA কে অক্ষ ধ'রে θ এবং $\theta+d\theta$ অর্ধশিরঃকোণ বিশিষ্ট দুইটি শঙ্কু কল্পনা করলে গোলকের বলয়াকৃতি ছায়াঙ্কিত অংশ এই দুই শঙ্কুর মধ্যে অবস্থিত হবে এবং B বিন্দু এই অংশের মধ্যে অবস্থিত হ'লে $\angle AOB$ এর মান θ ও $\theta+d\theta$ এর মধ্যে থাকবে। সুতরাং $\angle AOB$ এর মান θ ও $\theta+d\theta$ এর মধ্যে থাকার

সম্ভাব্যতা $=\dfrac{\text{বলয়াকৃতি অংশের ক্ষেত্রফল}}{\text{গোলকতলের মোট ক্ষেত্রফল}}$

$=\dfrac{2\pi C\sin\theta \,.\, C\,d\theta}{4\pi C^2}$ (কেননা বলয়াকৃতি অংশের ব্যাসার্ধ $C\sin\theta$ এবং প্রস্থ $C\,.\,d\theta$)

$=\frac{1}{2}\sin\theta\ d\theta$

সুতরাং $v=\int_{\theta=0}^{\pi} 2C\sin\frac{\theta}{2}\,.\,\frac{1}{2}\sin\theta\ d\theta^{*}=\frac{4}{3}C$ 3.2.4

* কোন চলরাশি x এর মান x ও $x+dx$ সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা

3.2.1 সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$\lambda = \frac{3}{4\pi n\sigma^2} \qquad 3.2.5$$

সঠিকভাবে গড় অবাধপথের তাত্ত্বিক মান নির্ণয়ের জন্য গ্যাসঅণুর গতিবেগের বণ্টনসূত্র সম্বন্ধে ধারণা থাকা প্রয়োজন। ম্যাক্সওয়েলের বেগবণ্টনসূত্র অনুযায়ী গড় অবাধপথের মান হিসাব করলে পাওয়া যায়

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n\sigma^2} \qquad 3.2.6$$

চতুর্থ অধ্যায়ে এই সূত্র প্রমাণিত হবে।

৩.৩ চাপ ও উষ্ণতার সংগে গড় অবাধপথের সম্পর্ক

3.2.6 সূত্র অনুযায়ী $\lambda \propto \frac{1}{n\sigma^2}$। নির্দিষ্ট উষ্ণতায় n বা গ্যাসের ঘনত্ব-সংখ্যা চাপ p এর সমানুপাতী (2.5.7 সূত্র)। সুতরাং

$$\lambda \propto \frac{1}{p} \qquad 3.3.1$$

নির্দিষ্ট আয়তনে গ্যাসের উষ্ণতা পরিবর্তিত হলেও n অপরিবর্তিত থাকে। কিন্তু σ^2 এর মান উষ্ণতার সংগে অল্পমাত্রায় পরিবর্তিত হয়। গ্যাস অণুগুলির পরস্পরের মধ্যে যে অল্পপাল্লার দুর্বল আকর্ষণ কাজ করে তার ফলে গ্যাস অণুর অন্যান্য অণুর সংগে সংঘর্ষের হার সামান্য বৃদ্ধি পায়। এর ফলে λ এর মান সামান্য হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। কিন্তু উষ্ণতা এবং সেইসঙ্গে সংঘর্ষমান গ্যাস অণুগুলির আপেক্ষিক গতিবেগ যত বৃদ্ধি পায় উল্লিখিত আকর্ষণী বলের প্রভাব তত হ্রাস পায়। দেখানো যায় যে λ এর প্রকাশার্থে ব্যবহৃত রাশিমালায় σ^2 এর স্থানে $\sigma_\infty^2\left(1+\frac{b}{T}\right)$ ব্যবহার করা যেতে পারে। এখানে σ_∞ = অসীম উষ্ণতায় σ এর মান, b = ধ্রুবক, যার মান গ্যাস-অণুর আকর্ষণী বলের পরিমাণ ও প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল এবং T = নিরপেক্ষ উষ্ণতা। স্পষ্টতঃই,

$$\lambda \propto \frac{1}{1+\frac{b}{T}} \qquad 3.3.2$$

অর্থাৎ উষ্ণতা বাড়লে গড় অবাধপথও সামান্য বৃদ্ধি পায়।

যদি $P(x)\,dx$ হয় তবে x এর যে কোনও অপেক্ষক $f(x)$ এর গড় মান $\overline{f(x)} = \int f(x)\,P(x)\,d(x)$। এই সমাকলন x এর সকল সম্ভবপর মানের উপর ব্যাপ্ত।

৩.৪ অবাধপথের দৈর্ঘ্যের বণ্টন

গ্যাসের নির্দিষ্ট কোন অণুর অবাধপথের মান আধার প্রাচীরের সংগে সংঘর্ষ উপেক্ষা করলে শূন্য থেকে অসীম পর্য্যন্ত হওয়া সম্ভব। ধরা যাক্ কোন অণুর পতিপথে x দৈর্ঘ্যের মধ্যে কোন সংঘর্ষ না হওয়ার সম্ভাব্যতা $f(x)$ এবং পরবর্তী dx দৈর্ঘ্যের মধ্যেই অণুটির সংঘর্ষ হওয়ার সম্ভাবনা $F(x)\,dx$। $f(x)$ ও $F(x)$ অপেক্ষকদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করাই আমাদের প্রয়োজন।

ধরা যাক্ কোন একটি অণু x দৈর্ঘ্যের পথ বিনা সংঘর্ষে অতিক্রম ক'রেছে। এর পরবর্তী dx দৈর্ঘ্যে অণুটির প্রভাবগোলক যে আয়তন অতিক্রম করে তার মধ্যে অন্য কোন অণুর কেন্দ্র অবস্থিত হওয়ার সম্ভাব্যতা $F(x)\,dx$ এর সমান। স্পষ্টতঃই এই সম্ভাব্যতা x এর উপর নির্ভরশীল হবে না এবং dx এর সমানুপাতী হবে। অর্থাৎ, আমরা লিখতে পারি

$$F(x)\,dx = P\,dx \quad (\,P = \text{ধ্রুবক}\,) \qquad 3.4.1$$

যে কোনও dx দৈর্ঘ্যের পথে অণুটির সংঘর্ষ না হওয়ার সম্ভাব্যতা $(1-P\,dx)$। সুতরাং অণুটির x দৈর্ঘ্যের পথ বিনা সংঘর্ষে অতিক্রম করা এবং সেইসঙ্গে পরবর্তী dx দূরত্বেও কোন সংঘর্ষ না হওয়ার যুগ্ম সম্ভাব্যতা $f(x)\,.\,(1-P\,dx)$। কিন্তু এই রাশি প্রকৃতপক্ষে $x+dx$ দূরত্ব বিনা সংঘর্ষে অতিক্রম করার সম্ভাব্যতার সমান। কাজেই

$$f(x+dx) = f(x)\,(1-P\,dx)$$

$f(x+dx)$ কে টেলর শ্রেণীতে $f(x) + \dfrac{df(x)}{dx}\,.\,dx$ লিখলে পাওয়া যায়

$$\frac{df(x)}{f(x)} = -P\,dx$$

সমাকলন দ্বারা $\ln f(x) = -Px + \ln A$ ($\ln A$ = সমাকলন ধ্রুবক)

$$\text{বা}\quad f(x) = Ae^{-Px}$$

A ও P এই দুইটি অজ্ঞাত ধ্রুবকের মান নির্ণয় করতে আমরা নিম্নোক্ত দুইটি তথ্য ব্যবহার করতে পারি।

1. x যত ছোট হয়, $f(x)$ মান তত বাড়ে। অবশেষে যখন $x=0$ হয়, $f(x)=1$ হয়।
2. সমস্ত অবাধপথের গড় মান λ এর সমান হবে।

প্রথম তথ্য অনুযায়ী $A=1$। সুতরাং $f(x)=e^{-Px}$। এখন কোন অবাধপথের দৈর্ঘ্য x ও $x+dx$ এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা, $\phi(x)\,dx$, প্রথমে x দৈর্ঘ্য বিনা সংঘর্ষে অতিক্রম করা ও পরবর্তী dx দৈর্ঘ্যে সংঘর্ষ হওয়ার যুগ্ম সম্ভাব্যতার সমান। এই সম্ভাব্যতার মান $e^{-Px}\,.\,P\,dx$। অতএব গড় অবাধপথ বা

$$\lambda=\int_{x=0}^{\infty} x\,.\,e^{-Px}\,.\,P\,dx$$

$$=\frac{1}{P}$$

$$\therefore\quad P=\frac{1}{\lambda}\quad \text{এবং}\quad f(x)=e^{-\frac{x}{\lambda}}। \qquad 3.4.2$$

অবাধপথের মান x ও $x+dx$ এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা

$$\phi(x)\,dx=e^{-Px}\,.\,P\,dx=\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}\,dx \qquad 3.4.3$$

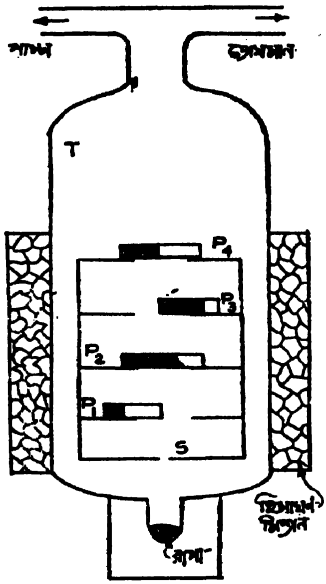
$f(x)$ এবং $\phi(x)$ উভয়ই x এর মান বৃদ্ধির সংগে সূচক (exponential) নিয়মানুযায়ী হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। $x\to\infty$ সীমায় উভয়ের মানই শূন্য হয়। সহজেই দেখা যায় মোট অবাধপথের মাত্র 37% গড় অবাধপথ অপেক্ষা দীর্ঘতর হয়। 4.6 λ অপেক্ষা দীর্ঘতর হয় অবাধপথের মাত্র 1%।

৩.৫ ব্যবহারিক উপায়ে গড় অবাধপথের মান নির্ণয়

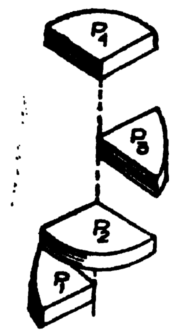
১৯২০ খৃষ্টাব্দে মাক্স্ বর্ন্ (Max Born) বিভিন্ন গ্যাসের মধ্যে রূপার অণুর গড় অবাধপথের পরিমাপ করেন। বর্ণের পরীক্ষায় অবাধপথ সম্পর্কে তাত্ত্বিক ধারণার সত্যতাও প্রতিপন্ন হয়।

বর্নের পরীক্ষা: বর্নের ব্যবহৃত যন্ত্রের বিন্যাস ৩.৫ চিত্রে দেখানো হল। এখানে T একটি কোয়ার্জ নির্মিত ফাঁপা বেলন। এর নিম্নাংশ একটি ক্ষুদ্র পাত্রের মত এবং তার মধ্যে কিছু রূপা উত্তপ্ত করা হয়। বাষ্পীভূত রূপা S ছিদ্রের মধ্য দিয়ে অণুরশ্মি রূপে নির্গত হয়। বেলনের মধ্যে মধ্যস্থলে গোলছিদ্র বিশিষ্ট চারটি পিতলের চাকতি সমান উচ্চতা অন্তর সাজানো আছে। প্রতিটি চাকতির উপর বৃত্তের এক-চতুর্থাংশ আকৃতির একটি কাচের পাত (P_1, P_2, P_3 বা P_4) রাখা আছে। এই পাতগুলি এমনভাবে সাজানো

থাকে যেন তাদের সমকোণী শীর্ষগুলি বেলনের অক্ষের উপর থাকে এবং প্রতিটি পরবর্তীটির তুলনায় 90° কোণে ঘোরানো থাকে (চিত্র ৩.৫ ক) S ছিদ্র থেকে পাতগুলির দূরত্বকে x_1, x_2, x_3 ও x_4 বলা যাক।



চিত্র ৩'৫



চিত্র ৩'৫ ক

পিতলের চাকতি ও কাচের পাতগুলিকে শীতল রাখার জন্য বেলনের কিছু অংশ হিমায়ণ-মিশ্রণে বেষ্টিত থাকে। T এর সংগে কয়েকটি নল দ্বারা পাম্প ও প্রেষমান যুক্ত থাকে। T এর মধ্যে যে কোনও গ্যাস প্রবেশ করানো যায় এবং তার চাপ নিয়ন্ত্রন করা যায়।

বেলনের নিম্নাংশে রক্ষিত রূপা উত্তপ্ত হ'লে রূপার অণু S ছিদ্রের মধ্য দিয়ে নির্গত হ'য়ে কাচের পাতগুলির শীর্ষাংশের উপর পড়ে। পাতগুলি হিমায়িত থাকায় অণুগুলি তাদের গতীয় শক্তি হারায় এবং কাচের উপর প্রলেপ সৃষ্টি করে। বিভিন্ন পাতের উপর প্রলেপের গভীরতায় তুলনা করার জন্য আলোকমিতির (photometry) সাহায্য নেওয়া হয়।

বেলনটিকে প্রথমে যতদূর সম্ভব গ্যাসশূন্য করা হয়। এই অবস্থায় চারটি কাচের পাতের উপর যে প্রলেপ পাওয়া যায়, ধরা যাক তাদের গভীরতা D_1, D_2, D_3 ও D_4। উচ্চতার সংগে রূপার অণুগুলি ক্রমশঃ

ছড়িয়ে পড়ার ফলে এই চারটি গভীরতার মানে সামান্য তারতম্য হয়। বেলনের মধ্যে এখন কোন গ্যাস আকাঙ্ক্ষিত চাপে প্রবেশ করানো হ'ল। পুনরায় কাচের উপর যে প্রলেপ পাওয়া যাবে, ধরা যাক্ তাদের গভীরতা d_1, d_2, d_3 ও d_4। পূর্বের থেকে এই রাশিগুলি দুই কারণে বিভিন্ন হবে। দ্বিতীয়ক্ষেত্রে রূপার কিছু অণু বেলনমধ্যস্থ গ্যাসের অণুগুলির সংগে সংঘর্ষের ফলে অণুরশ্মি থেকে অপসৃত হবে। গ্যাসের মধ্যে রূপার অণুর গড় অবাধপথ λ হলে অণুগুলির মাত্র $e^{-x_1/\lambda}$, $e^{-x_2/\lambda}$ ইত্যাদি অংশ কাচের উপর পড়বে এবং প্রলেপের গভীরতাও সমানুপাতে হ্রাসপ্রাপ্ত হবে। এছাড়া দুইক্ষেত্রে অণুরশ্মির তীব্রতা ও প্রলেপনের সময়ের বিভিন্নতার জন্য এক সমানুপাত ধ্রুবক (k) ও অন্তর্ভুক্ত হবে। সুতরাং

$$d_1 = kD_1 e^{-x_1/\lambda};\ d_2 = kD_2 e^{-x_2/\lambda} \text{ ইত্যাদি} \qquad 3.5.1$$

এরূপ চারটি সূত্রের যে কোনও দুইটি থেকেই λ এর মান পাওয়া সম্ভব যথা ঃ

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{ln\left[\frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{D_2}{D_1}\right]} \qquad 3.5.2$$

x_1 ও x_2 পৃথকভাবে জানা না থাকলেও $(x_2 - x_1)$, অর্থাৎ P_1 ও P_2 এর মধ্যে ব্যবধান সূক্ষ্মভাবে মাপা যায়। $\frac{d_1}{d_2}$ এবং $\frac{D_1}{D_2}$ এর মান ব্যবহার ক'রে গড় অবাধপথ λ এর মান পাওয়া যেতে পারে।

বর্নের পরীক্ষায় $(x_2 - x_1)$ এর মান ছিল 1 cm.। $4{\cdot}5 \times 10^{-3}$ ও $5{\cdot}8 \times 10^{-3}$ টর চাপে বায়ুর মধ্যে λ এর মান পাওয়া যায় যথাক্রমে 2·4 ও 1·7 cm। $p\lambda$ এর মান দুই ক্ষেত্রে প্রায় সমান। এছাড়া λ এর পরীক্ষালব্ধ মান বায়ু ও বাষ্পীভূত রূপার সান্দ্রতার থেকে হিসাব ক'রে যে মান আশা করা যায় তার সংগে মেলে। সুতরাং বর্নের পরীক্ষা থেকে 3.4.2 সূত্রের সত্যতা যেমন প্রমাণিত হয় তেমনই 3.3.1 সূত্রের λ ও p এর সম্পর্কও সত্য প্রতিপন্ন হয়। এই পরীক্ষায় রূপার অণুর যে গড় অবাধপথের পরিমাপ করা হয় তার তত্ত্বগত প্রকৃতি ৪·৯ অংশে আলোচিত হবে।

৩·৬ ইলেকট্রনের গড় অবাধপথ

গ্যাসের মধ্যে ইলেকট্রনের গড় অবাধপথের তাত্ত্বিকমান হিসাব করতে হ'লে দুইটি বিষয়ে লক্ষ্য রাখা প্রয়োজন। প্রথমতঃ, সাধারণ অবস্থায় গ্যাস অণুর

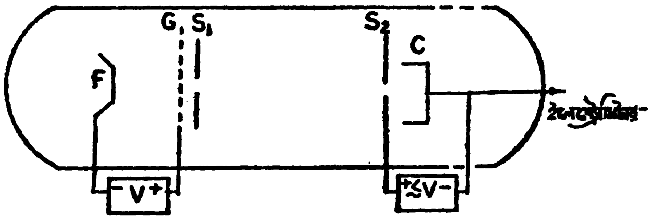
তুলনায় ইলেকট্রনের গতিবেগ অনেক বেশী হয়। $300°K$ $(27°C)$ উষ্ণতায় M আণবিক ভর বিশিষ্ট গ্যাস-অণুর মূল গড় বর্গবেগ প্রায় $\frac{2.7}{\sqrt{M}}$ km/sec। অপরপক্ষে V ভোল্ট বিভবপ্রভেদ দ্বারা ত্বরিত ইলেকট্রনের গতিবেগ প্রায় $600\sqrt{V}$ km/sec (আপেক্ষিকবাদী নয়, এমন গতিতে, অর্থাৎ $V << 0.51 \times 10^6$ হ'লে)। $M=28$ (নাইট্রোজেন গ্যাসের ক্ষেত্রে) এবং $V=1$ ধরলে ইলেকট্রনের গতিবেগ নাইট্রোজেন অণুর তুলনায় প্রায় 1200 গুণ বেশী হ'তে দেখা যায়। এই অবস্থায় নাইট্রোজেন অণুগুলিকে স্থির ধরে নেওয়া অযৌক্তিক নয়। দ্বিতীয়তঃ সাধারণ গ্যাস অণুর ব্যাস যেখানে 10^{-8} cm এর মত, সেখানে ইলেকট্রনের ব্যাস মাত্র 10^{-13} cm এর কাছাকাছি। সুতরাং ইলেকট্রনকে প্রকৃত বিন্দুভর হিসাবে কল্পনা করা যেতে পারে এবং ইলেকট্রনের প্রভাবগোলকের ব্যাসার্ধকে গ্যাস অণুর ব্যাসার্ধের সমান বলে ধরা যেতে পারে। 3.2.3 সূত্রে 'σ' এর স্থলে গ্যাসঅণুর ব্যাসার্ধ r ব্যবহার করলেই ইলেকট্রনের গড় অবাধপথ জানা যেতে পারে, অর্থাৎ

$$\lambda_{el.} = \frac{1}{\pi n r^2} \qquad 3.6.1$$

লেনার্ড (১৮৯৫) সর্বপ্রথম ব্যবহারিকভাবে প্রমাণ করেন যে যখন কোন ইলেকট্রন রশ্মি গ্যাসের মধ্যে x দূরত্ব অতিক্রম করে তখন ইলেকট্রন-সংখ্যা $e^{-\alpha x}$ এর অনুপাতে হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। এখানে α একটি ধ্রুবক এবং 3.4.2 সূত্রের সংগে তুলনা করলে দেখা যাবে যে $\alpha = \frac{1}{\lambda_{el.}}$। লেনার্ডের পরীক্ষায় লক্ষিত হয় যে অল্পগতির ইলেকট্রনের জন্য গড় অবাধপথের মান 3.6.1 সূত্রের সংগে মোটামুটিভাবে মেলে। কিন্তু উচ্চগতির ইলেকট্রনের ক্ষেত্রে গড় অবাধ-পথ প্রত্যাশিত মানের থেকে অনেক বড় হয়।

১৯২১ খৃষ্টাব্দে **মেয়ারের** (Mayer) পরীক্ষায় অল্পগতিতে ইলেকট্রনের গড় অবাধপথ আরও সূক্ষ্মভাবে নির্ণীত হয়। মেয়ারের ব্যবহৃত যন্ত্রে (চিত্র ৩.৬) উত্তপ্ত ফিলামেণ্ট F থেকে ইলেকট্রন উৎপন্ন হয় এবং F এর তুলনায় V ধনাত্মক বিভবে গ্রিড G দ্বারা ত্বরিত হয়। ইলেকট্রনগুলি এবার পরস্পরের মধ্যে x ব্যবধানে রক্ষিত S_1 ও S_2 পর্দার ছিদ্রের মধ্য দিয়ে নির্গত হয়। S_2 পর্দার পশ্চাতে একটি ইলেকট্রন সংগ্রাহক C থাকে। S_2 এবং C এর মধ্যে যে বিভবপ্রভেদ থাকে তা ইলেকট্রনগুলিকে মন্দিত করে। এই বিভবপ্রভেদ V অপেক্ষা সামান্য কম, ফলে যে ইলেকট্রনগুলি মধ্যপথে কোনরূপ

সংঘর্ষে লিপ্ত হয় না শুধু সেগুলিই C তে পৌঁছায়। নির্দিষ্ট সময়ে C তে সংগৃহীত ইলেকট্রন সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য C এর সংগে ইলেকট্রোমিটার সংযুক্ত থাকে। সবকটি তড়িৎদ্বারই একটি কাচের আধারের মধ্যে সীল করা থাকে এবং ঐ আধারকে প্রয়োজনমত বায়ুশূন্য বা নির্দিষ্ট চাপে কোন গ্যাস দ্বারা পূর্ণ



চিত্র ৩.৬

করা যায়। S_1 ও S_2 এর ব্যবধান (x) প্রয়োজনমত বাহির থেকে নিয়ন্ত্রিত করা যায়।

ধরা যাক, আধারের মধ্যে গ্যাসের চাপ যখন p, C তে সংগৃহীত ইলেকট্রন তখন I তড়িৎপ্রবাহ উৎপন্ন করে। I নানা কারণে x এর উপর নির্ভরশীল হবে। প্রথমতঃ, p চাপে অণুগুলির সংগে ইলেকট্রনের সংঘর্ষের ফলে ইলেকট্রন সংগ্রহের হার এবং সেই সঙ্গে I $e^{-\alpha p\cdot x}$ এর সমানুপাতী হবে (3.3.1 ও 3.4.2 সূত্রানুযায়ী)। দ্বিতীয়তঃ, যতদূর সম্ভব নির্বাত অবস্থাতেও আধারে যে গ্যাস অবশিষ্ট থাকে, তার ফলে তড়িৎপ্রবাহ আর একটি উৎপাদক $e^{-\beta x}$ এর সমানুপাতী হবে। এবং তৃতীয়তঃ, x দূরত্ব অতিক্রমকালে ইলেকট্রন রশ্মির কৌণিক বিক্ষেপণের ফলে x এর কোন অপেক্ষক $f(x)$ এর সংগে I সমানুপাতী হবে। এছাড়াও x এর নির্দিষ্ট মানে চাপের বৃদ্ধির সংগে ফিলামেন্টের উষ্ণতাও হ্রাস পায়, সুতরাং তড়িৎপ্রবাহও কমে। মোটের উপর লেখা যায়

$$I = I_0(p)\, f(x) e^{-(\beta+\alpha p)x} \qquad 3.6.2$$

p ও x রাশিদ্বয়ের মান যখন p_i ও x_j তখন তড়িৎপ্রবাহকে I_{ij} দ্বারা চিহ্নিত করা যাক। p_1 ও p_2 চাপে, x এর মান x_1 ও x_2 হ'লে তড়িৎপ্রবাহের নির্ধারিত মান হবে :

$$I_{11} = I_0(p_1)\ f(x_1)\ e^{-(\beta+\alpha p_1)x_1}$$

$$I_{12} = I_0(p_1)\ f(x_2)\ e^{-(\beta+\alpha p_1)x_2}$$

$$I_{21}=I_0(p_2)\ f(x_1)\ \ e^{-(\beta+\alpha p_2)x_1}$$

এবং $$I_{22}=I_0(p_2)\ f(x_2)\ \ e^{-(\beta+\alpha p_2)x_2}\ ।$$

যদি $ln\ \frac{I_{11}}{I_{12}}$ কে L_1 ও $ln\ \frac{I_{21}}{I_{22}}$ কে L_2 বলা যায় তবে দেখানো যায় যে

$$\alpha=\frac{L_1-L_2}{(p_1-p_2)(x_2-x_1)}\ । \qquad 3.6.3$$

α এর মান 3.6.3 সূত্র থেকে সহজেই নির্ণয় করা যায়।

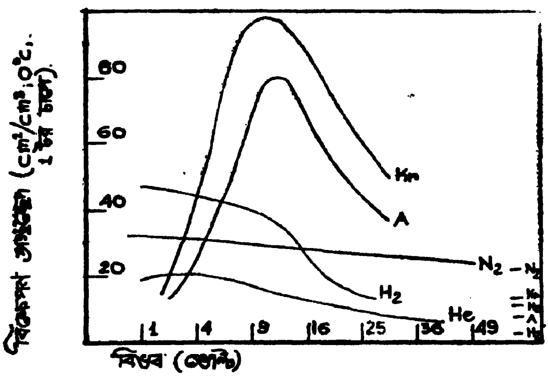
3.6.2 সূত্রের $e^{-\alpha p.x}$ উৎপাদকটি $e^{-x/\lambda_{e\,l}}$ এর সংগে তুলনীয়। অর্থাৎ $\alpha p=\frac{1}{\lambda_{e\,l.}}$ । অথবা 3.6.1 সূত্রানুযায়ী $\alpha p=\pi nr^2$ । এই রাশি 1 c.c. আয়তনে অবস্থিত সমস্ত অণুর মোট প্রস্থচ্ছেদের সমান। গ্যাসঅণুর আচরণ কঠিন গোলকের মত হ'লে 'αp' বা '$\lambda_{e\,l.}$' এর মান ইলেকট্রন-বেগ-নিরপেক্ষ হওয়া উচিত। গ্যাসের সান্দ্রতা থেকে গ্যাসের মধ্যে কোন অণুর গড় অবাধপথের যে মান λ পাওয়া যায় তা $\frac{1}{4\sqrt{2}\pi nr^2}$ এর সমান, অর্থাৎ

$$\lambda_{e\,l.}=4\sqrt{2}\lambda \qquad 3.6.4$$

V এর অতি অল্পমান (কয়েক ভোল্ট) ব্যতীত লেনার্ড ও মেয়ারের পরীক্ষায় এই সূত্র সত্য ব'লেই প্রতিপন্ন হয়। অতি অল্পগতি ইলেকট্রনের ক্ষেত্রে যে অনৈক্য দেখা যায় রামসাউয়ারের (Ramsauer) সমসাময়িক পরীক্ষায় তা আরও সূক্ষ্মভাবে পরীক্ষিত হয়।

রামসাউয়ারের পরীক্ষায় উত্তপ্ত ফিলামেণ্ট থেকে নির্গত ইলেকট্রনের পরিবর্তে ফটো-ইলেকট্রন কাজে লাগানো হয় এবং তাদের গতি নির্বাচনের জন্য চৌম্বকক্ষেত্রের সাহায্য নেওয়া হয়। মেয়ারের পরীক্ষা ও এই পরীক্ষার ফল মোটামুটি একরূপ। রামসাউয়ার ইলেকট্রনের বিভিন্ন গতির জন্য ইলেকট্রন বিক্ষেপণের প্রস্থচ্ছেদ নির্ণয় করেন। ৩.৭ চিত্রে এই পরীক্ষায় লব্ধফল লেখের সাহায্যে দেখানো হ'য়েছে। লেখচিত্রের অনুভূমিক অক্ষে ইলেকট্রনের ত্বরণ সৃষ্টিকারী বিভব এবং উল্লম্ব অক্ষে 1 টর চাপে 0°C উষ্ণতায় 'αp' অথবা 1 c.c. আয়তনে অবস্থিত গ্যাস অণুর মোট বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ অঙ্কিত হ'ল। ডানদিকের হ্রস্ব অনুভূমিক রেখাগুলি গ্যাসের সান্দ্রতা থেকে লব্ধ 'αp' এর প্রত্যাশিত মান সূচিত করে। স্পষ্টই দেখা যায় গতিবেগের সংগে 'αp' এর

মানের প্রচুর পরিবর্তন ঘটে। সাধারণভাবে উচ্চ গতিবেগে 'αp' এর মান প্রত্যাশিত মানের কাছাকাছি হলেও অল্প গতিতে অনেক বেশী, আবার অত্যুচ্চ গতিতে আরও কম হয়। অত্যুচ্চ গতিবেগে ইলেকট্রন অণুর ইলেকট্রন-মেঘ ভেদ ক'রে যেতে পারে। সুতরাং 'αp' এর মান অল্প হওয়া সম্ভব। সমস্ত



চিত্র ৩·৭—রামসাউয়ারের পরীক্ষার ফল

নিষ্ক্রিয় গ্যাসের ক্ষেত্রে ইলেকট্রনের বিশেষ গতিবেগে গ্যাস-অণুর (বা পরমাণুর) নিজস্ব ইলেকট্রনের উচ্চতর শক্তি বিশিষ্ট অবস্থায় অনুনাদী উৎক্ষেপণ (resonance excitation) ঘটে। এই অবস্থায় গ্যাস-অণুর ইলেকট্রন বিক্ষেপণ-প্রবণতা বর্ধিত হয়। ফলে বিক্ষেপণ-প্রস্থচ্ছেদও বাড়ে। অতি অল্প গতিবেগে নিষ্ক্রিয় গ্যাসের অণুর বিক্ষেপণ-প্রস্থচ্ছেদ অতিমাত্রায় হ্রাস পায়। এই ঘটনার ব্যাখ্যা কোয়ান্টাম-গতিতত্ত্বের সাহায্যেই দেওয়া সম্ভব।

৩.৭ অবাধপথের বণ্টননীতি অনুযায়ী সংঘাতসংখ্যা ও চাপের পুনর্নিরূপণ

2.3.2 সূত্রে পাওয়া গেছে dv আয়তনের মধ্যে যে কোনও মুহূর্তে $dn=\dfrac{ndv\ \delta s \cos\theta}{4\pi r^2}$ সংখ্যক অণুর গতি δs অভিমুখী হয়। যদি গ্যাস-অণুর সংঘর্ষ কল্পনা করা যায় তবে এই অণুগুলির একাংশ δs পর্যন্ত পৌঁছানোর আগেই সংঘর্ষে লিপ্ত হবে। অপরপক্ষে যে সকল অণুর গতি δs অভিমুখী ছিল না তাদের কতকগুলিও মধ্যপথে সংঘর্ষের ফলে δs-এ পৌঁছাতে পারে। সুতরাং গ্যাস-অণুর সংঘর্ষ কল্পনা করা হ'লে আধার গাত্রে গ্যাস-অণুর সংঘাত-সংখ্যা এবং প্রযুক্ত ভরবেগ, অর্থাৎ চাপ, উপযুক্ত উপায়ে নির্ণয় করা প্রয়োজন।

ধরা যাক, আধারের মধ্যে একই প্রকার অণু বর্তমান যাদের মধ্যে c এবং $c+dc$ এর মধ্যে গতিবেগ বিশিষ্ট অণুর ঘনত্বসংখ্যা dn_c এবং গড় অবাধপথ λ_c । এই অণুগুলির যে কোনটি সেকেণ্ডে গড়ে $\frac{c}{\lambda c}$-সংখ্যক সংঘর্ষে লিপ্ত হয়। পূর্বের dv আয়তনে (চিত্র ২.১) যে কোনও সময়ে $dn_c dv$ সংখ্যক এরূপ অণু থাকবে এবং তাদের মধ্যে সংঘর্ষের ফলে একক সময়ে মোট $dn_c dv \frac{c}{\lambda_c}$ সংখ্যক অণুর অবাধপথ শুরু হবে। গ্যাসের সমদৈশিকতাহেতু এই অবাধ পথগুলি চারিদিকে সমভাবে বিন্যস্ত থাকবে ফলে পূর্বের মত অণুগুলির $\frac{\delta s \cos\theta}{4\pi r^2}$ অংশের গতিবেগ δs অভিমুখী হবে। 3.4.2 সূত্র অনুযায়ী এই অংশেরও $e^{-\frac{r}{\lambda_c}}$ অংশ δs তলে পৌঁছাবে, বাকী অংশ সংঘর্ষের ফলে অন্যত্র বিক্ষিপ্ত হবে। অতএব মোট যে অণুগুলি একক সময়ে dv আয়তনের মধ্যে সংঘর্ষের ফলে যাত্রাশুরু ক'রে δs তলে পৌঁছাবে তাদের সংখ্যা

$$dn_c dv \frac{c}{\lambda_c} \cdot \frac{\delta s \cos\theta}{4\pi r^2} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda_c}} \qquad 3.7.1$$

dv এর পরিবর্তে $r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \, d\phi$ লিখে গতিবেগ c ও δs এর উপরস্থ মোট আয়তনের উপর সমাকলন করলে মোট সংঘাত সংখ্যা পাওয়া যায় ঃ

$$N_c = \frac{1}{\delta s} \int_{c=0}^{\infty} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} dn_c \frac{c}{\lambda_c} \cdot \frac{\delta s \cos\theta}{4\pi r^2} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda_c}} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \, d\phi$$

$$= \frac{1}{4} \int_{c=0}^{\infty} c \, dn_c$$

$$= \frac{nc}{4} \quad (n = \text{অণুর মোট ঘনত্ব সংখ্যা}, \; c = \text{গড় গতিবেগ}) \qquad 3.7.2$$

এই ফল 2.3.3 সূত্রে লব্ধ ফলের সমান। পূর্বের সমাকলনে আধারের আয়তন সীমিত হলেও r এর উর্দ্ধসীমা ∞ ধরা হ'য়েছে। এর কারণ পূর্বে ২.৪ অংশে আলোচিত হ'য়েছে।

আধার গাত্রে সংঘর্ষের ফলে dv আয়তন থেকে আগত এবং c ও $c+dc$ এর মধ্যে গতিবেগবিশিষ্ট প্রতিটি অণু আধারের প্রাচীরে $2mc \cos\theta$ পরিমাণ

গতিবেগ প্রদান করে। δs তলে প্রতি সেকেণ্ডে সকল অণুর প্রদত্ত ভরবেগের পরিমাণ

$$\int_{c=0}^{\infty}\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{\pi} 2mc\cos\theta \,.\, dn \,.\, \frac{c}{\lambda_c} \,.\, \frac{\delta s\cos\theta}{4\pi r^2} \,.\, e^{-\frac{r}{\lambda_c}} \,.\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \, d\phi$$

$$= \frac{m\delta s}{3}\int_{c=0}^{\infty} c^2 dn$$

$$= \tfrac{1}{3} mn\overline{c^2} \,.\, \delta s \quad (\overline{c^2} = \text{গড় বর্গ গতিবেগ})$$

যেহেতু এই ভরবেগ $p\delta s$ এর সমান,

$$p = \tfrac{1}{3} mn\overline{c^2} \qquad 3.7.3$$

পূর্বে ২.৪.১ অংশে এই সূত্রই নির্ণীত হয়েছে।

চতুর্থ অধ্যায়

গ্যাস অণুর বেগবণ্টন

৪.১ স্থির অবস্থায় গ্যাস অণুর বেগবণ্টনের বৈশিষ্ট্য

স্থির অবস্থায় গ্যাস অণুর গতিবেগ এক নির্দিষ্ট বণ্টননীতি অনুসরণ করে। বর্তমান অধ্যায়ে "ম্যাক্সওয়েলীয় বেগবণ্টন" নামে অভিহিত এই বণ্টনের প্রকৃতি নির্ধারিত হবে ও তার ফলশ্রুতি আলোচিত হবে।

কোন নির্দিষ্ট গ্যাস-অণুর গতিবেগ প্রতি সংঘর্ষেই পরিবর্তিত হয়। কিন্তু স্থির অবস্থায় বণ্টননীতির কোন পরিবর্তন ঘটে না। কোন গ্যাসের মধ্যে c এবং $c+\triangle c$ সীমাদ্বয়ের মধ্যে গতিবেগ বিশিষ্ট কিছু সংখ্যক গ্যাস-অণুর গতিবেগ প্রতি সেকেণ্ডে সংঘর্ষের ফলে পরিবর্তিত হ'য়ে ঐ সীমাদ্বয়ের বাইরে যায়। কিন্তু মোটের উপর ঠিক ততগুলি অণুর গতিবেগ ঐ সময়ের মধ্যে অন্যান্য মান থেকে পরিবর্তিত হ'য়ে c এবং $c+\triangle c$ সীমাদ্বয়ের মধ্যে ফিরে আসে। ফলে ঐ দুই সীমার মধ্যে গতিবেগ বিশিষ্ট অণুর সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকে। অপর পক্ষে যদি প্রাথমিক অবস্থায় অণুগুলির গতিবেগ ভিন্নপ্রকারে বণ্টিত থাকে তবে সংঘর্ষের ফলে ক্রমশঃ স্থির অবস্থা প্রতিষ্ঠিত হয় এবং অণুর গতিবেগ ক্রমশঃ ম্যাক্সওয়েলীয় বণ্টননীতি অনুসরণ করে।

গ্যাস অণুর বেগবণ্টন সূত্র দুই উপায়ে নির্ধারিত হবে ঃ

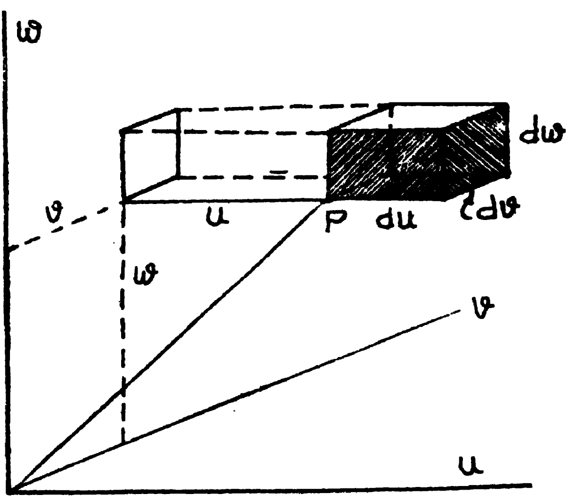
(ক) ম্যাক্সওয়েলের সম্ভাব্যতা প্রণালী ও (খ) বোলৎসমানের সংঘর্ষ প্রণালী।

৪.২ ম্যাক্সওয়েলের সম্ভাব্যতা প্রণালী

সম্ভাব্যতা প্রণালীতে অণুর বেগবণ্টন-সূত্র নির্ধারণের জন্য স্থির অবস্থায় গ্যাসের সাধারণ প্রকৃতি সম্বন্ধে যে অঙ্গীকারগুলি প্রয়োজন সেগুলি হ'ল (ক) গ্যাসের সমগ্র আয়তনের সমদৈশিকতা (আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রেও এই অঙ্গীকার স্বীকৃত হ'য়েছে) এবং (খ) পরস্পর সমকোণী অক্ষে কোন এক অণুর গতিবেগ উপাংশগুলির পারস্পরিক স্বাতন্ত্র্য। প্রথম অঙ্গীকারটি (ক) সহজেই মেনে নেওয়া গেলেও দ্বিতীয় অঙ্গীকারটি সাধারণ বুদ্ধির পরিপন্থী। কোন অণুর গতিবেগের এক উপাংশের মান অল্প বা অধিক হ'লে অপর কোনও উপাংশেও

যথাক্রমে অল্প বা অধিক হওয়া স্বাভাবিক বলে মনে হ'তে পারে। তবে এই অঙ্গীকার আপাতদৃষ্টিতে না হ'লেও বাস্তব ক্ষেত্রে সত্য।

ধরা যাক, কোন এক সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশ তন্ত্রে গ্যাস-অণুর গতিবেগ C এর x, y ও z অক্ষে উপাংশ যথাক্রমে u, v ও w। যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত কোন এক অণুর গতিবেগের x-উপাংশ u ও $u+du$ এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা পূর্বের অঙ্গীকার অনুযায়ী কেবলমাত্র u এর উপরই নির্ভরশীল হতে পারে, v বা w এর উপর নয়। ধরা যাক এই সম্ভাব্যতা $f(u)\,du$। সুতরাং গতি-বেগের y-উপাংশ v ও $v+dv$ এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা $f(v)\,dv$ এবং z-উপাংশ w ও $w+dw$ এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা $f(w)\,dw$। যেহেতু x, y ও z দিকগুলির কোন গুণগত পার্থক্য নেই, অতএব পূর্বের তিন ক্ষেত্রেই গতিবেগ-উপাংশগুলির একই অপেক্ষক (f) ব্যবহার করা যাবে। কোন অণুর গতিবেগের x, y ও z উপাংশগুলি একই সংগে পূর্বোক্ত সীমার মধ্যে থাকায় যুগ্ম সম্ভাব্যতা $f(u)\,f(v)\,f(w)\,du\,dv\,dw$ কেননা উপাংশগুলির স্বাতন্ত্র্যের ফলে তাদের মধ্যে কোন অনুবন্ধ (correlation) নেই। এই প্রকার অণুকে A-প্রকারের অণু বলা হবে।



৪.১ নং চিত্র

গ্যাস অণুগুলির গতিবেগ এক ত্রিমাত্রিক লেখচিত্রে দেখানো যেতে পারে (চিত্র ৪.১)। কোন অণুর গতিবেগ উপাংশগুলি u, v, w হ'লে এই লেখচিত্রে (u, v, w) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট P বিন্দু অণুটিকে নির্দেশ করবে। সমস্ত

A প্রকারের অণুর নির্দেশক বিন্দু চিত্রে প্রদর্শিত আয়তফলকের মধ্যে অবস্থিত হবে, অন্য কোন অণুর নির্দেশক বিন্দু এর মধ্যে থাকবে না। গ্যাস-অণুর মোট সংখ্যা N হ'লে মোট A প্রকারের অণুর সংখ্যা

$$dN = N f(u) f(v) f(w)\, du\, dv\, dw$$
$$= N f(u) f(v) f(w)\, d\tau \qquad 4.2.1$$

এখানে, $d\tau = du\, dv\, dw$ = আয়তফলকের আয়তন। কিন্তু dN পৃথকভাবে u, v ও w এর উপর নির্ভরশীল হ'তে পারে না কেননা x, y ও z অক্ষগুলি যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত। বরং dN মোট গতিবেগ c এর উপর নির্ভরশীল হবে এবং বেগ নির্দেশক নির্দেশতন্ত্রে আয়তন $d\tau$ এর সমানুপাতী হবে। অর্থাৎ

$$dN = N\, F(c)\, d\tau \qquad 4.2.2$$

এরূপ দেখা যেতে পারে। $F(c)$ এখানে c এর কোন অপেক্ষক। 4.2.1 ও 4.2.2 সূত্র থেকে দেখা যায়

$$f(u) f(v) f(w) = F(c) \qquad 4.2.3$$

$f(u)$ কে $\phi(u^2)$ ইত্যাদি এবং $F(c)$ কে $\Phi(c^2)$ হিসাবে লিখলে (ϕ ও Φ অন্য দুই অপেক্ষক সূচিত করে) পাওয়া যায়

$$\phi(u^2)\,.\,\phi(v^2)\,.\,\phi(w^2) = \phi(c^2) = \phi(u^2 + v^2 + w^2) \qquad 4.2.4$$

স্পষ্টই বোঝা যায় যে $\phi(u^2)$ কে যদি ae^{bu^2} হিসাবে এবং $\phi(v^2)$ ও $\phi(w^2)$ কে অনুরূপভাবে লেখা যায় তবে 4.2.4 সমীকরণ সিদ্ধ হয়। নিম্নে এর গাণিতিক প্রমাণ উপস্থাপিত হল।

যদি c এর মান স্থির থাকে তবে 4.2.3 থেকে পাওয়া যায়—

$$\ln f(u) + \ln f(v) + \ln f(w) = \ln F(c) = \text{ধ্রুবক।}$$

অন্তরকলন ক'রে

$$\frac{f'(u)}{f(u)}\, du + \frac{f'(v)}{f(v)}\, dv + \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw = 0 \qquad 4.2.5$$

$$\left(\text{এখানে } f'(u) = \frac{d}{du} f(u) \text{ ইত্যাদি}\right).$$

আবার $u^2 + v^2 + w^2 = c^2$ = ধ্রুবক। এই সমীকরণকে অন্তরকলন ক'রলে $u\, du + v\, dv + w\, dw = 0$ 4.2.6

4.2.6 সমীকরণকে কোনও অনির্দিষ্ট ধ্রুবক λ দ্বারা গুণ ক'রে 4.2.5 সমীকরণের সংগে যুক্ত করলে পাওয়া যায় ঃ

$$\left(\frac{f'(u)}{f(u)}+\lambda u\right)du+\left(\frac{f'(v)}{f(v)}+\lambda v\right)dv+\left(\frac{f'(w)}{f(w)}+\lambda w\right)dw=0 \qquad 4.2.7$$

λ-ধ্রুবকটির মান ইচ্ছামত নির্বাচন করা যায় আবার du, dv ও dw এর যে কোনওটিকে ইচ্ছামত শূন্য ব'লে ধরা যায়। সেজন্য 4.2.7 সমীকরণের বামপার্শ্বের যে কোনও দুইটি রাশির মানই শূন্য হতে পারে। সে অবস্থায় সমীকরণটিকে সিদ্ধ করতে তৃতীয় রাশিটিও শূন্য হবে। u, v ও w উপাংশগুলির পারস্পরিক স্বাতন্ত্র্যের জন্যই এরূপ হয়। তখন লেখা যেতে পারে যে

$$\frac{f'(u)}{f(u)}+\lambda u=0, \quad \frac{f'(v)}{f(v)}+\lambda v=0 \quad \text{ও} \quad \frac{f'(w)}{f(w)}+\lambda w=0$$

প্রথমটিকে সমাকলন করলে পাওয়া যায়

$$\ln f(u)=-\frac{\lambda}{২}u^২+C, \quad (C=\text{সমাকলন ধ্রুবক})।$$

$e^C=a$ এবং $\frac{\lambda}{২}=\frac{1}{\alpha^২}$ লিখলে পাওয়া যায়

$$\left.\begin{aligned} f(u)&=ae^{-u^২/\alpha^২}. \\ \text{অনুরূপভাবে } f(v)&=ae^{-v^২/\alpha^২} \text{ ও } f(w)=ae^{-w^২/\alpha^২} \end{aligned}\right\} \quad 4.2.8$$

গতিবেগের x, y ও z উপাংশ যথাক্রমে u ও $u+du$, v ও $v+dv$ এবং w ও $w+dw$ সীমার মধ্যে যুগ্মভাবে থাকার সম্ভাব্যতা

$$\begin{aligned} F(u,v,w)\,du\,dv\,dw&=f(u)\,f(v)\,f(w)\,du\,dv\,dw \\ &=a^৩\,e^{-(u^২+v^২+w^২)/\alpha^২}\,du\,dv\,dw \\ &=a^৩\,e^{-c^২/\alpha^২}\,du\,dv\,dw \end{aligned} \qquad 4.2.9$$

4.2.8 ও 4.2.9 সূত্রগুলিকে গ্যাস অণুর বেগবণ্টন সূত্র বলা যায়। a ও α এখানে অনির্ণীত দুইটি ধ্রুবক। ৪.৪ অংশে এগুলির মান নির্ধারিত হবে।

৪.৩ বোল্‌ৎস্‌মানের সংঘর্ষ প্রণালী

গ্যাস অণুর সংঘর্ষকে দুইটি অণুরূপ স্থিতিস্থাপক গোলকের সংঘর্ষ হিসাবে কল্পনা ক'রে এবং স্থির অবস্থায় সংঘর্ষের ফলে বিশেষ গতিবেগবিশিষ্ট অণুর

সংখ্যায় কোন তারতম্য ঘটেনা এই সত্যের উপর ভিত্তি করেই এই প্রণালীতে বেগের বন্টনসূত্র নির্ণীত হয়।

প্রথমে দুইটি অনুরূপ স্থিতিস্থাপক গোলকের সোজাসুজি সংঘর্ষ কল্পনা করা যাক। ধরা যাক তাদের প্রতিটির ভর m এবং একই সরলরেখায় গতিবেগ u_1 ও u_2। সংঘর্ষের পরে তাদের গতিবেগ u_1' ও u_2' হয়। রৈখিক ভরবেগ ও গতীয় শক্তির নিত্যতা হেতু

$$mu_1 + mu_2 = mu_1' + mu_2' \quad \text{অর্থাৎ} \quad u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$$

এবং $\frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 = \frac{1}{2}mu_1'^2 + \frac{1}{2}mu_2'^2$ অর্থাৎ $u_1^2 + u_2^2 = u_1'^2 + u_2'^2$

এই দুই সমীকরণ সিদ্ধ হ'লে হয় (i) $u_1' = u_2$ ও $u_2' = u_1$

অথবা (ii) $u_1' = u_1$ ও $u_2' = u_2$

এর মধ্যে সমাধান (ii) অবশ্যই তুচ্ছ (trivial) কেননা সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে গতিবেগের পরিবর্তন না হ'লে সংঘর্ষ আদৌ ঘটেনি ব'লেই ধরা উচিত। সমাধান (i) থেকে দেখা যায় যে দুই অণুর মধ্যে গতিবেগ বিনিময় ঘটে।

অণুগুলির গতিবেগের দিককে x-অক্ষরূপে কল্পনা করা যাক। যদি yz তলে অণু দুইটির কোন গতিবেগ-উপাংশ থাকে তবে অবশ্যই তার কোন পরিবর্তন ঘটবে না। অর্থাৎ দুই অণুর গতিবেগ উপাংশগুলি যদি যথাক্রমে u_1, v_1, w_1 এবং u_2, v_2, w_2 হয় তবে সংঘর্ষের পর সেগুলি যথাক্রমে u_2, v_1, w_1 এবং u_1, v_2, w_2 হবে।

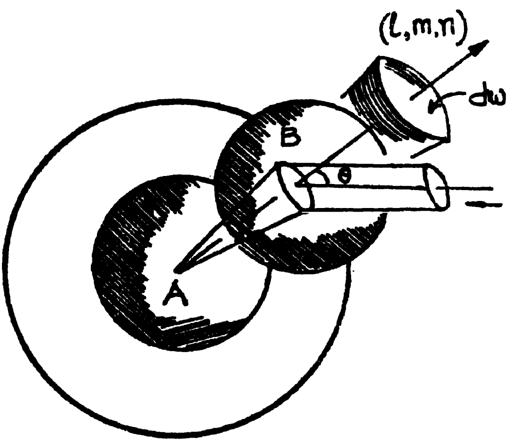
অনুরূপভাবে যদি উপাংশগুলি পূর্বে $u_1 + du_1, v_1 + dv_1, w_1 + dw_1$ এবং $u_2 + du_2, v_2 + dv_2, w_2 + dw_2$ হয় তবে সংঘর্ষের পর সেগুলি $u_2 + du_2,\ v_1 + dv_1,\ w_1 + dw_1$ এবং $u_1 + du_1,\ v_2 + dv_2,\ w_2 + dw_2$ হবে।

কোন গ্যাসের মধ্যে u_1 ও $u_1 + du_1$, v_1 ও $v_1 + dv_1$ এবং w_1 ও $w_1 + dw_1$ সীমার মধ্যে যে সকল অণুর গতিবেগ উপাংশগুলি থাকবে সেগুলিকে A প্রকারের এবং u_2 ও $u_2 + du_2$, v_2 ও $v_2 + dv_2$ এবং w_2 ও $w_2 + dw_2$ সীমার মধ্যে যেগুলির গতিবেগ উপাংশ থাকবে সেগুলিকে B প্রকারের অণু বলা হবে। A প্রকারের কোন অণুর সংগে B প্রকারের কোন অণুর সংঘর্ষ হ'লে দুইটি অণুর মোট ছয়টি গতিবেগ উপাংশের ঊর্ধ্ব ও নিম্নসীমার মধ্যে ব্যবধানগুলির গুণফল সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে $du_1\, dv_1\, dw_1\, du_2\, dv_2\, dw_2$ এর সমান থাকে। এই গুণফলকে "গতিবেগ-বিস্তার" বলা হবে। পূর্বের আলোচনায় সংঘর্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল

থাকলেও গতিবেগ বিস্তারের এই ধ্রুবত্বের সংগে x-অক্ষের কোন বিশেষ সম্পর্ক নেই। সুতরাং সংঘর্ষরেখা যে দিকেই থাক না কেন, গতিবেগ-বিস্তারের ধ্রুবত্ব সমভাবেই রক্ষিত হবে।

৪.২ অংশের মত, কোন অণুর গতিবেগ-উপাংশত্রয় u ও $+du$, v ও $v+dv$ এবং w ও $w+dw$ সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতাকে $F(u, v, w)\, du\, dv\, dw$ বলা হবে। এই সম্ভাব্যতা নিকটবর্তী কোন অণুর গতিবেগের উপর কোনভাবেই নির্ভর করে না।

যদি কোন সংঘর্ষের পূর্বে অণু দুইটি একটি A প্রকারের ও অপরটি B প্রকারের হয় এবং যদি সংঘর্ষরেখা l, m, n দিকসূচক-কোসাইনে (direction cosine) এক ক্ষুদ্র ঘনকোণ $d\omega$ এর মধ্যে থাকে তবে সেটিকে α-প্রকারের সংঘর্ষ বলা হবে। ৪.২ চিত্রে এই প্রকারের একটি সংঘর্ষ দেখানো হ'য়েছে।



৪·২ নং চিত্র—α প্রকারের সংঘর্ষ

ধরা যাক σ = অণুর ব্যাস এবং V = সংঘর্ষের পূর্বে অণু দুইটির পরস্পরের মধ্যে আপেক্ষিক গতি। সংঘর্ষের মুহূর্তে B অণুর কেন্দ্র A অণুর প্রভাব-গোলকের উপর $\sigma^2 d\omega$ ক্ষেত্রফলের তলের উপর অবস্থিত হবে। সংঘর্ষরেখা ও গতিবেগ V এর মধ্যে সূক্ষ্মকোণ θ ধরা যাক। $\sigma^2 d\omega$ তলকে যদি V এর বিপরীতমুখে Vdt দূরত্বে পরিচালিত করা যায় তবে এই তল $\sigma^2 d\omega \,.\, Vdt \,.\, \cos\theta$ এর সমান আয়তন অতিক্রম করবে। B অণুর কেন্দ্র কোন মুহূর্তে এই আয়তনের মধ্যে অবস্থিত হ'লে তবেই তারপর dt সময়ের মধ্যে A অণুর

সংগে তার সংঘর্ষ ঘটবে। অণুর ঘনত্বসংখ্যা n হ'লে এই আয়তনে কোন B অণু অবস্থিত হওয়ার সম্ভাব্যতা

$$nF(u_2, v_2, w_2)\, du_2\, dv_2\, dw_2\, .\, \sigma^2 d\,\omega.\ Vdt \cos\theta\ ।$$

যে কোনও A প্রকার অণুর dt সময়ে কোন B প্রকার অণুর সংগে α প্রকার সংঘর্ষে লিপ্ত হওয়ার সম্ভাব্যতা একই। প্রতি একক আয়তনে A প্রকার অণুর সংখ্যা $nF(u_1, v_1, w_1)\, du_1\, dv_1\, dw_1$। সুতরাং প্রতি একক আয়তনে dt সময়ে α প্রকার সংঘর্ষের সংখ্যা

$$dN_\alpha = n^2 F(u_1, v_1, w_1)\, F(u_2, v_2, w_2)$$
$$du_1\, dv_1\, dw_1\, du_2\, dv_2\, dw_2\, .\, \sigma^2 d\omega\, Vdt \cos\theta \qquad 4.3.1$$

এই প্রকার সংঘর্ষে A অণুর সংখ্যা এক হ্রাস পায়।

এখন আমরা, অন্য এক প্রকার সংঘর্ষের কল্পনা করব। যদি কোন সংঘর্ষের পর একটি অণু A প্রকারের এবং অপরটি B প্রকারের হয় এবং যদি সংঘর্ষরেখা α প্রকারের সংঘর্ষের জন্য আরোপিত সর্তকে সম্মত করে তবে সেটিকে β প্রকারের সংঘর্ষ বলা হবে। α প্রকারের সংঘর্ষে সময়ের দিক বিপরীত করলেই β প্রকারের সংঘর্ষ পাওয়া যায় এবং এই প্রকার প্রতি সংঘর্ষে A অণুর সংখ্যা এক বৃদ্ধি পায়। ধরা যাক এই প্রকার সংঘর্ষের পূর্বে প্রথম অণুর গতিবেগ উপাংশ u_1' ও $u_1' + du_1'$, v_1' ও $v_1' + dv_1'$ এবং w_1' ও $w_1' + dw_1'$ সীমার মধ্যে এবং দ্বিতীয় অণুর গতিবেগ উপাংশ u_2' ও $u_2' + du_2'$, v_2' ও $v_2' + dv_2'$ এবং w_2' ও $w_2' + dw_2'$ সীমার মধ্যে থাকে। পূর্বের মত দেখানো যায় যে প্রতি একক আয়তনে dt সময়ে β প্রকারের সংঘর্ষের সংখ্যা হবে

$$dN\beta = n^2 F(u_1', v_1', w_1') F(u_2', v_2', w_2')\, du_1' dv_1' dw_1' du_2' dv_2' dw_2'.$$
$$\sigma^2 d\omega V dt \cos\theta \qquad 4.3.2$$

কিন্তু β প্রকার সংঘর্ষের প্রাথমিক অবস্থায় গতিবেগ-বিস্তার $du_1'dv_1'dw_1'$ $du_2'dv_2'dw_2'$ এবং সংঘর্ষের পরবর্তী অবস্থায় $du_1 dv_1 dw_1 du_2 dv_2 dw_2$। পূর্বনির্ণীত নীতি অনুযায়ী এই দুই গতিবেগবিস্তারের মান সমান। অর্থাৎ

$$du_1 dv_1 dw_1 d_2 dv_2 dw_2 = du_1' dv_1' dw_1' du_2' dv_2' dw_2' \qquad 4.3.3$$

4.3.1 ও 4.3·2 সূত্রের সাহায্যে লেখা যায় যে α ও β প্রকার সংঘর্ষের

জন্য একক আয়তনে A প্রকার অণুর সংখ্যাবৃদ্ধির হার প্রতি একক সময়ে ($F(u_1, v_1, w_1)=F_1$, $F(u_1', v_1', w_1')=F_1'$ ইত্যাদি লিখলে)

$$\frac{dN\beta}{dt}-\frac{dN\alpha}{dt}=n^2\,[F_1'F_2'-F_1F_2]\,du_1dv_1dw_1du_2dv_2dw_2.$$

$$\sigma^2 d\omega\; V\cos\theta\text{ ।}$$

এই রাশিকে u_2, v_2, w_2 এবং ω এরস কল মানের জন্য সমাকলিত করলে একক আয়তনে A প্রকারের অণুর সংখ্যাবৃদ্ধির মোট হার পাওয়া যাবে :

$$\frac{\partial n_A}{\partial t}=n^2\sigma^2 du_1dv_1dw_1\int\cdots\int_{u_2,\,v_2,\,w_2,\,\omega}[F_1'F_2'-F_1F_2]\,V\cos\theta\,du_2dv_2dw_2d\omega \qquad 4.3.4$$

কিন্তু স্থির অবস্থায় A প্রকার অণুর মোট ঘনত্বসংখ্যা হ্রাস বা বৃদ্ধি পেতে পারে না। সুতরাং $\frac{dn_A}{dt}=0$। এই অবস্থায় 4.3.4 সমীকরণে $[F_1'F_2'-F_1F_2]=0$ হবে। নতুবা $[F_1'F_2'-F_1F_2]$ এর মান কখনো ধনাত্মক, কখনো ঋণাত্মক হ'য়ে সমগ্র সমাকলনটির মান শূন্য হবে। বোল্ৎস্‌মান নিম্নালোচিত যুক্তির সাহায্যে প্রমাণ করেন যে $[F_1'F_2'-F_1F_2]$ এর মান শূন্য হতেই হবে।

ধরা যাক্ $\iiint F_1\, ln\, F_1\; du_1\; dv_1dw_1=H$ 4.3.5

সমাকলনের সীমা u_1, v_1 ও w_1 এর সমস্ত সম্ভব মানের জন্য ব'লে বুঝতে হবে। F_1 এর প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল H কোন একটি রাশি।

4.3.5 থেকে $\frac{\partial H}{\partial t}=\iiint (1+ln\,F_1)\,\frac{\partial F_1}{\partial t}\,du_1dv_1dw_1$

কিন্তু $\frac{\partial}{\partial t}\,(F_1du_1dv_1dw_1)$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial n_A}{\partial t}$$

অতএব, 4.3.4 এর সাহায্যে

$$\frac{\partial H}{\partial t}=n\,\sigma^2\int\cdots\int(1+lnF_1)\,[F_1'F_2'-F_1F_2]\,V\cos\theta\,du_1dv_1dw_1\,du_2dv_2dw_2d\omega \qquad 4.3.6\,(a)$$

4.3.5 সমীকরণে F_1 এর পরিবর্তে F_2 ব্যবহার করলে পাওয়া যাবে

$$\frac{\partial H}{\partial t}=n\,\sigma^2\int\cdots\int(1+lnF_2)[F_1'F_2'-F_1F_2]\,V\cos\theta\,du_1dv_1dw_1\,du_2dv_2dw_2d\omega \qquad 4.3.6\,(b)$$

4.3.6 (*a*) ও (*b*) থেকে $\frac{\partial H}{\partial t}$ এর গড় মান

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{n\sigma^2}{2}\int\cdots\int(2+lnF_1F_2)\,[F_1'F_2'-F_1F_2]\,V\cos\theta\,du_1dv_1dw_1\,du_2dv_2dw_2d\omega \qquad 4.3.7\,(a)$$

4.3.5 সূত্রে F_1 এবং F_2 এর স্থলে F_1' ও F_2' ব্যবহার ক'রে অনুরূপ ভাবে পাওয়া যাবে

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{n\sigma^2}{2}\int\cdots\int(2+lnF_1'F_2')\,[F_1F_2-F_1'F_2']\,V\cos\theta\,du_1'dv_1'\,dw_1'du_2'dv_2'dw_2'd\omega$$

$$=\frac{n\sigma^2}{2}\int\cdots\int(2+lnF_1'F_2')\,[F_1F_2-F_1'F_2']\,V\cos\theta\,du_1dv_1dw_1du_2dv_2dw_2d\omega \qquad 4.3.7\,(b)$$

(4.3.3 সূত্রের সাহায্যে)

4.3.7 (*a*) ও (*b*) থেকে $\frac{\partial H}{\partial t}$ এর গড় মান পাওয়া যাবে ঃ

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{n\sigma^2}{4}\int\cdots\int(ln\,F_1F_2-lnF_1F_2)\,[F_1'F_2'-F_1F_2]\,V\cos\theta\,du_1\ldots dw_2d\omega \qquad 4.3.8$$

স্থির অবস্থায় F_1, F_2 ইত্যাদির মান অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং H এর সংজ্ঞা (4.3.5) অনুযায়ী 'H' ও অপরিবর্তিত থাকে। এই অবস্থায় $\frac{\partial H}{\partial t}=0$। 4.3.8 সূত্র থেকে দেখা যায় যে $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ হ'লে হয় $[F_1'F_2'-F_1F_2]=0$ হবে, নতুবা $(ln\,F_1F_2-ln\,F_1'F_2')=0$ হবে। কিন্তু $F_1'F_2'\neq F_1F_2$ হলে $(ln\,F_1F_2-ln\,F_1'F_2')\,(F_1'F_2'-F_1F_2)$ সর্বদাই ঋণাত্মক হবে এবং সমাকলনটির মানও ঋণাত্মক হবে। সুতরাং স্থির অবস্থায়

$$F_1'F_2'-F_1F_2=0$$

বা $$ln\,F_1+ln\,F_2=ln\,F_1'+ln\,F_2' \qquad 4.3.9$$

অর্থাৎ সংঘর্ষমান দুই অণুর F রাশিদ্বয়ের গুণফল অথবা তাদের লগারিথ্‌মের যোগফল সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে সমান থাকবে।

কোন সংঘর্ষে যে রাশিগুলি প্রকৃতপক্ষে অপরিবর্তিত থাকে সেগুলি হ'ল দুই অণুর মোট ভরবেগের তিনটি উপাংশ এবং মোট গতীয় শক্তি। এই চারটি ব্যতীত পঞ্চম কোন রাশি থাকতে পারে না; কেননা অণুদ্বয়ের প্রাথমিক অবস্থা সম্পূর্ণ জ্ঞাত হ'লেও সংঘর্ষরেখার দিক, অর্থাৎ দুইটি কোণ অনির্দিষ্ট থাকে। সংঘর্ষের পর দুইটি অণুর মোট ছয়টি গতিবেগ উপাংশের মান নির্ণয় করতে এই দুই কোণই জানা প্রয়োজন। সুতরাং আরও অনধিক (6−2) বা চারটি রাশির মানই জানা থাকা সম্ভব। *ln F* এই চারটি রাশির কোন একঘাত (linear) অপেক্ষক হ'লে 4.3.9 সমীকরণ সিদ্ধ হবে। ধরা যাক

$$\ln F = c_1 \cdot \tfrac{1}{2}m(u^2+v^2+w^2) + c_2 \cdot mu + c_3 \cdot mv + c_4 mw + c_5 \qquad 4.3.10$$

$c_1, c_2 \ldots c_5$ এখানে অনির্দিষ্ট ধ্রুবক। c_1, c_2 ইত্যাদির স্থলে অন্য ধ্রুবক ব্যবহার করে পাওয়া যায়:

$$F(u, v, w) = a^3 e^{-\frac{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2+(w-w_0)^2}{a^2}} \qquad 4.3.11$$

সহজেই দেখা যায় যে এখানে $c_1 = -\frac{2}{ma^2}$, $c_2 = \frac{2u_0}{ma^2}$ ইত্যাদি এবং

$c_5 = 3 \ln a - \frac{1}{a^2}(u_0 + v_0^2 + w_0^2)$।

u_0, v_0 ও w_0 ধ্রুবকগুলির ব্যবহারিক অর্থ সহজেই বার করা যায়। x-অক্ষে অণুর গতিবেগ উপাংশ u এর গড় মান নির্ণয় করা যাক।

$$\bar{u} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u\, F(u, v, w)\,du\,dv\,dw}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v, w)\,du\,dv\,dw}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{(u-u_0)}{a^2}}\,du}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-u_0)^2}{a^2}}\,du}$$

$$= u_0$$

অনুরূপভাবে দেখা যাবে $\bar{v}=v_0$, $\bar{w}=w_0$ । অর্থাৎ, u_0, v_0 ও w_0 গ্যাস-অণুর গড় গতিবেগ বা গ্যাসের ভরকেন্দ্রের গতিবেগের তিন উপাংশ সূচিত করে। যদি গ্যাসের ভরকেন্দ্র নিশ্চল থাকে তবে $u_0=v_0=w_0=0$ লেখা যায় এবং 4.3.11 সূত্র সরলীকৃত হয় ঃ

$$F(u, v, w)=a^3 e^{-\frac{u^2+v^2+w^2}{\alpha^2}} \qquad 4.3.12$$

লক্ষণীয় যে এই সূত্র 4.2.9 সূত্র থেকে অভিন্ন ।

ম্যাক্সওয়েলের সম্ভাব্যতা প্রণালীর সংগে বোল্‌ৎস্‌মানের সংঘর্ষ প্রণালীর তুলনামূলক আলোচনা করা যেতে পারে। সম্ভাব্যতা প্রণালীর বিরুদ্ধে প্রধান যুক্তি এই যে আণবিক গতিবেগের উপাংশগুলির মধ্যে কোন পারস্পরিক নির্ভরতা নেই এরূপ অঙ্গীকার প্রথমেই ক'রে নেওয়া হয়। বস্তুতঃ এই অঙ্গীকারের প্রমাণ ও ম্যাক্সওয়েলের প্রণালীতে বেগবণ্টন সূত্রের প্রমাণ পরস্পরের উপর নির্ভরশীল। এছাড়া বোল্‌ৎস্‌মানের মতে গ্যাসের বেগবণ্টন আণবিক সংঘর্ষের জন্যই সাম্য লাভ করে। ম্যাক্সওয়েলের প্রণালী আণবিক সংঘর্ষ না ঘটলেও সমানভাবে প্রযোজ্য থাকে, সুতরাং এই প্রণালী কখনই ত্রুটিহীন হতে পারে না। বোল্‌ৎস্‌মানের সংঘর্ষ প্রণালী এই ত্রুটি থেকে মুক্ত হলেও অপ্রমাণিত অঙ্গীকার এখানেও স্বীকার করা হয়েছে। *A* প্রকার অণুর নিকটবর্তী কোন আয়তনে *B* প্রকার কোন অণু থাকার সম্ভাব্যতাকে u, v, w এর সম্পূর্ণ নিরপেক্ষ ধরা হ'য়েছে। কিন্তু কোন একটি অণুর গতিবেগ গড় গতিবেগের তুলনায় অনেক বেশী হ'লে আশা করা যায় যে তার সমীপবর্তী অণুগুলির অন্ততঃ কয়েকটি ঐ দ্রুতগামী অণুর সংগে সংঘর্ষ হেতু অধিক গতিবেগ লাভ ক'রে থাকবে ; এবং তার ফলে সমীপবর্তী অণুগুলির গতিবেগ মোটের উপর অন্যান্য অণুর তুলনায় বেশী হবে। বোল্‌ৎস্‌মানের প্রণালীতে প্রথমেই এর বিপরীত সিদ্ধান্ত ধরে নেওয়া হ'য়েছে। এই দিক দিয়া বিচার করলে বোল্‌ৎস্‌মানের প্রণালীও কিছুটা ত্রুটিযুক্ত।

4.8 a ও α ধ্রুবকদ্বয়ের মান ও গতিবেগের গড়

a ধ্রুবকের মান 4.2.8 সূত্রগুলির যে কোনটির থেকে বার করা যায়।

কোন অণুর গতিবেগের x উপাংশ যেহেতু $-\infty$ থেকে ∞ এর মধ্যে অবস্থিত হবে, অতএব

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-u^2/\alpha^2}\, du = 1$$

বা, $a\,\alpha\sqrt{\pi} = 1$ (পাদটীকা দ্রষ্টব্য)

অর্থাৎ $a = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}$ 4.4.1

$f(u)$, $f(v)$ ইত্যাদিতে 'a' ধ্রুবকের এই মান ব্যবহার করা যায় :

$$f(u) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-u^2/\alpha^2},\quad f(v) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-v^2/\alpha^2}$$

$$f(w) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-w^2/\alpha^2} \quad \text{(4.2.8 থেকে)} \qquad 4.4.2$$

α ধ্রুবকের ব্যবহারিক অর্থ নির্ণয়ের জন্য লব্ধ গতিবেগ c এর বণ্টনসূত্র জানা প্রয়োজন। ইতিপূর্বে দেখা গেছে u ও $u+du$, v ও $v+dv$

$\int^{\infty} e^{-u^2/\alpha^2}\, u^n du$ এর মান :

n	y	n	y
0	$\frac{\alpha}{2}\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\alpha^2}{2}$
2	$\frac{\alpha^3}{4}\sqrt{\pi}$	3	$\frac{\alpha^4}{2}$
4	$\frac{3\alpha^5}{8}\sqrt{\pi}$	5	α^6
$2k$ (k=পূর্ণসংখ্যা)	$\frac{\alpha^{2k+1}}{2}\Gamma_{k+\frac{1}{2}}$ $=\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}.\alpha^{2k+1}$	$2k+1$	$\frac{k!}{2}\alpha^{2(k+1)}$

এবং w ও $w+dw$ এই সীমার মধ্যে গতিবেগ-উপাংশবিশিষ্ট অণুর ঘনত্বসংখ্যা

$$dn = n f(u) f(v) f(w)\, du\, dv\, dw$$

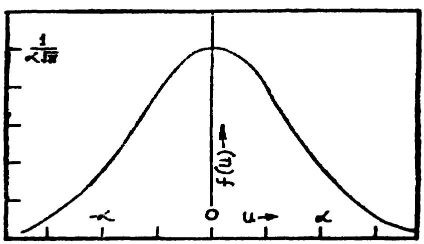
$$= \frac{n}{a^3 \pi^{\frac{3}{2}}} e^{-c^2/a^2} d\tau \quad [d\tau = du\, dv\, dw$$

= গতিবেগ নির্দেশতন্ত্রে অতিক্ষুদ্র আয়তন]

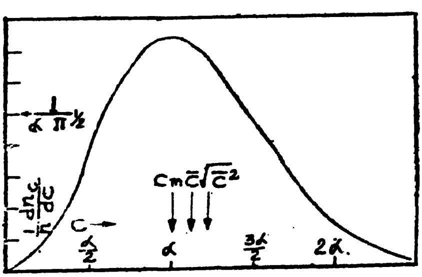
গ্যাস অণুর গতিবেগকে যদি কোন গোলীয় নির্দেশতন্ত্রে (c, θ, ϕ) নির্দেশিত করা যায় তবে $d\tau$ এর পরিবর্তে গোলীয় নির্দেশতন্ত্রে মান $c^2 \sin\theta\, d\theta\, dc\, d\phi$ ব্যবহার করা যায়। যেহেতু লব্ধ গতিবেগের বণ্টনসূত্র θ ও ϕ উপর নির্ভরশীল হ'তে পারে না, কেবলমাত্র c এর উপর বণ্টনসূত্রের নির্ভরশীলতা অনুসন্ধানের জন্য θ ও ϕ এর উপর dn এর সমাকলন প্রয়োজন। c ও $c+dc$ এর মধ্যে লব্ধ গতিবেগ বিশিষ্ট অণুর ঘনত্বসংখ্যা

$$dn_c = \frac{n}{a^3 \pi^{\frac{3}{2}}} e^{-c^2/a^2} c^2 dc \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{4n}{a^3 \pi^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{c^2}{a^2}} c^2 dc \qquad 4.4.3$$



চিত্র ৪.৩ (ক)—u এর বণ্টন



চিত্র ৪.৩ (খ)—c এর বণ্টন

4.4.2 ও 4.4.3 সূত্রের সাহায্যে u, v, w ও c এর বণ্টনপ্রকৃতি জানা যায়। ৪.৩ চিত্রদ্বয়ে u ও c এর বণ্টন দেখানো হ'ল।

4.4.3 সূত্রের সাহায্যে লব্ধ গতিবেগের গড় মান নির্ণয় করা যায়। সচরাচর যে গড় মানগুলি ব্যবহৃত হয় সেগুলি হ'ল—(ক) গতিবেগের মধ্যক (arithmetic mean) $\bar{c}$ (খ) মূল গড় বর্গবেগ $\sqrt{\overline{c^2}}$ এবং (গ) সর্বাধিক সম্ভাব্য গতিবেগ। এই মানগুলি নির্ণয় করা যাক।

(ক) গতিবেগের মধ্যক $\bar{c} = \frac{1}{n}\int_0^\infty c\,dn_c$

$$= \frac{4}{\alpha^3\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty e^{-bc^2}c^3dc$$

$$= \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \qquad 4.4.4$$

(খ) গড় বর্গবেগ $\overline{c^2} = \frac{1}{n}\int_0^\infty c^2dn_c$

$$= \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-bc^2}c^4dc$$

$$= \tfrac{3}{2}\alpha^2$$

$\therefore$ মূল গড় বর্গবেগ $\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\alpha$ 4.4.5

(গ) সর্বাধিক সম্ভাব্য গতিবেগের (c_m) জন্য $\frac{d}{dc}\left(\frac{dn_c}{dc}\right)_{c_m} = 0$

অথবা $\frac{d}{dc}\left(e^{-c^2/\alpha^2}c^2\right)_{c_m} = 0$

বা $c_m = \alpha$ 4.4.6

তিন প্রকার গড় গতিবেগের অনুপাত নিম্নরূপ :

$$\bar{c} : \sqrt{\overline{c^2}} : c_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} : \sqrt{\frac{3}{2}} : 1$$

$$= 1{\cdot}128 : 1{\cdot}225 : 1$$

৪.৩(খ) চিত্রে গড় গতিবেগগুলির অবস্থানও দেখানো হয়েছে।

এখন আমরা α ধ্রুবকের ব্যবহারিক অর্থ নির্ণয় করতে পারি। 2.5.8 ও 4.4.5 সূত্রের সাহায্যে

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\,\alpha = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

অথবা, $$\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{\cdots}} \qquad 4.4.7$$

4.4.2 ও 4.4.3 সূত্রগুলিকে এখন কোন অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ছাড়াই লেখা যেতে পারে ঃ

$$\left.\begin{aligned} f(u) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\; e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \\ f(v) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\; e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \\ f(w) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\; e^{-\frac{mw^2}{2kT}} \end{aligned}\right\} \; 4.4.8$$

$$\frac{dn_c}{dc} = n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mc^2}{2kT}}\, c^2. \qquad 4.4.9$$

4.4.4 ও 4.4.7 সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}} \qquad 4.4.10$$

৪.৫ অণুর গতীয় শক্তির বণ্টন

রৈখিক গতির জন্য অণুর গতীয় শক্তি $E = \frac{1}{2}mc^2$। E এর বণ্টনসূত্র 4.4.9 থেকে সহজেই পাওয়া যায়।

$c^2 = \frac{2E}{m}$, $dc = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}$ ব্যবহার ক'রে

$$dn_E = n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} \cdot \frac{2E}{m} \cdot \frac{dE}{\sqrt{2mE}}$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{\pi k^3 T^3}}\; \sqrt{E}\; e^{-\frac{E}{kT}}\, dE \qquad 4.5.1$$

এখানে $dn_E = E$ ও $E+dE$ সীমার মধ্যে গতীয় শক্তিবিশিষ্ট অণুর ঘনত্ব-সংখ্যা। E এর পরিবর্তে ঘাতবিহীন রাশি $\epsilon = \frac{E}{kT}$ ব্যবহার করলে উপরের সূত্রটি আরও সরল হয়ঃ

$$dn_E = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\epsilon}\, e^{-\epsilon} d\epsilon \qquad 4.5.2$$

৪.৬ ব্যবহারিক উপায়ে ম্যাক্সওয়েলীয় বেগবণ্টন সূত্রের প্রতিপাদন

এই পর্যন্ত যে সমস্ত উপায়ে ম্যাক্সওয়েল সূত্রের সত্যতা প্রমাণিত হ'য়েছে সেগুলিকে মোটের উপর প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষ এই দুইভাগে ভাগ করা যায়। প্রত্যক্ষ উপায়ে কোন নির্দিষ্ট উষ্ণতায় অণুর বেগবর্ণালি (velocity spectrum) নিরূপিত হয় অথবা বিভিন্ন গতিবেগসীমার মধ্যে অণুর আপেক্ষিক প্রাচুর্য্য নির্ণীত হয়। পরোক্ষ উপায় বলতে সেইসব পরীক্ষাকে বোঝানো হবে যেখানে অণুর (বা ইলেকট্রনের) বেগপ্রসূত অন্য কোন ক্রিয়ার পর্য্যবেক্ষণ করা হয়। এই অংশে দুই প্রকারেরই কয়েকটি প্রণালী আলোচিত হবে।

প্রত্যক্ষ উপায়

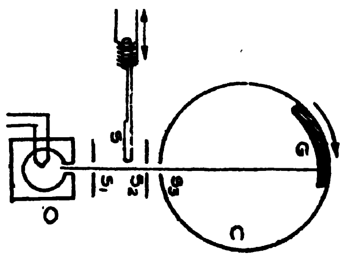
(ক) আবর্তক-পাত প্রণালী

এই প্রণালীতে দুইটি স্লিটএর মধ্য দিয়ে প্রেরিত অণুর রশ্মি দ্রুত সরণশীল এক আবর্তনকারী পাতের উপর পড়ে। পাতের উপর অণুর যে প্রলেপ পড়ে, বিভিন্ন স্থানে তার গভীরতা থেকে রশ্মির মধ্যে অণুর বেগের বণ্টন নির্ধারণ করা যায়। স্টার্ন (Stern, 1920), জার্টমান (Zartman, 1931) ও কো (Ko, 1934) এই পদ্ধতি ব্যবহার করেন।

জার্টমান ও কোর পরীক্ষাঃ

৪.৪ চিত্রে জার্টমানের ব্যবহৃত যন্ত্রের বিন্যাস দেখানো হ'ল। এখানে O একটি বৈদ্যুতিক চুল্লী এবং তার মধ্যে উত্তপ্ত বিসমাথ দুইটি সূক্ষ্ম স্লিট S_1 এবং S_2 এর মধ্য দিয়ে অণুরশ্মিরূপে নির্গত হয়। অণুগুলি যাতে অন্য গ্যাস-অণুর সংগে সংঘর্ষ না ঘটে সেজন্য সমস্ত যন্ত্রটি উচ্চ নির্বাত কক্ষে রাখা হয়। কক্ষের মধ্যে চাপ 10^{-5} মিমি. পারদ বা তার চেয়েও কম থাকে। চিত্রে S একটি চৌম্বক কপাট এবং এটিকে নির্বাত কক্ষের বাইরে থেকে ইচ্ছামত অণুরশ্মির

পথে প্রবিষ্ট করা যায়। C একটি দ্রুত অবর্তনশীল ফাঁপা বেলন। এটির গাত্রেও S_3 স্লিট এমনভাবে কাটা আছে যে বেলনটি ঘুরলে এক সময় S_3 S_2



৪.৪ চিত্র—জার্টমানের পরীক্ষার বিন্যাস

এর ঠিক উপরে আসে। এই অবস্থায় অণুরশ্মি বেলনের অভ্যন্তরে প্রবেশ করে এবং কাঁচের প্লেট G এর উপর পড়ে। তরল বায়ুর সাহায্যে কক্ষটি হিমায়িত রাখা হয়। এতে কক্ষের চাপ কম রাখতে সাহায্য করে আবার এর ফলে বিসমাথ অণুরশ্মি কাঁচের প্লেটের উপর সহজেই প্রলেপ সৃষ্টি করতে পারে। চুল্লীর উষ্ণতা থার্মোকাপ্‌ল্ এর সাহায্যে মাপা যায়।

প্রথমে বেলনটি এমন অবস্থায় স্থির রাখা হয় যাতে S_3 ঠিক S_2 এর উপরে থাকে। চুল্লীটি উত্তপ্ত করার পর S কপাট কিছুক্ষণ খুলে রাখা হয়, ফলে অণুরশ্মি G প্লেটের উপর S_3 এর বিপরীত বিন্দু Pতে এক প্রলেপ সৃষ্টি করে। বেলনের মধ্যে প্রবিষ্ট হওয়ার পর স্লিটের প্রস্থের দরুণ অণুরশ্মি কিছুটা ছড়িয়ে পড়ে, ফলে এই প্রলেপের কিছুটা প্রস্থ থাকে। নির্দিষ্ট সময়ে মোট নির্গত অণুর সংখ্যা n এবং প্রলেপের প্রস্থ $2a$ হয় তবে $\frac{n}{2a}$ রাশিকে প্রলেপের গভীরতা I_0 বলা যায়। প্লেটটিকে এখন অপসারিত ক'রে মাইক্রো-ফটোমিটারের সাহায্যে প্রলেপের প্রস্থ ও গভীরতা মাপা হয়।

অনুরূপভাবে বেলনের ঘূর্ণ্যমান অবস্থাতেও প্লেটের উপর বিসমাথ অণুর প্রলেপ পাওয়া যায়। কিন্তু এক্ষেত্রে অণুরশ্মির S_3 এর মধ্য দিয়ে প্রবেশ করার পর G তে পৌঁছাবার আগেই প্লেটটি কিছুটা দূরত্বে সরে যায়। বিভিন্ন অণু আগের গতিবেগ অনুযায়ী প্লেটের বিভিন্ন বিন্দুতে পতিত হয়। ধরা যাক C গতিবেগ বিশিষ্ট কোন অণু শুধুমাত্র কাঁচের প্লেটের গতিবেগের জন্য P বিন্দু থেকে S দূরত্বে প্লেটের উপর পড়ে। বেলনের অভ্যন্তরীণ ব্যাস $= d$,

প্রতি সেকেণ্ডে বেলনের আবর্তন সংখ্যা $= n_r$ হ'লে অণুর S_8 থেকে G পর্য্যন্ত যাওয়ার সময় $= \frac{d}{C} - \frac{S}{\pi n_r d}$

$$\text{সুতরাং} \quad S = \frac{\pi n_r d^2}{C} = \frac{A}{C} \, (A = \pi n_r d^2) \qquad 4.6.1$$

চুল্লীর মধ্যে উত্তপ্ত অণুগুলির গতিবেগ ম্যাক্সওয়েলীয় সূত্র অনুযায়ী বণ্টিত থাকে। কিন্তু যে অণুগুলি চুল্লী থেকে নির্গত হয় তাদের গতিবেগের বণ্টন একই প্রকার হয় না। চুল্লীর গাত্রে δS ক্ষেত্রফলের উপর একক সময়ে পতিত এবং C থেকে $c + dc$ এর মধ্যে গতিবেগবিশিষ্ট অণুর সংখ্যা $\frac{1}{4} dn_e.c\delta S$ (3.7.2 ও 4.4.3 সূত্র দ্রষ্টব্য)। চুল্লীর উপরস্থ ছিদ্রের মধ্য দিয়ে পূর্বের সমান সময়ে নির্গত অণুরশ্মির মধ্যে অণুর গতিবেগের বণ্টনকে নীচের সূত্রের সাহায্যে বর্ণনা করা যায় ঃ

$$dn'_c = Ke^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} C^3 dC \qquad 4.6.2$$

এখানে $K =$ ধ্রুবক এবং $dn_c' =$ রশ্মির মধ্যে C ও $C + dC$ গতিবেগের মধ্যে অণুর সংখ্যা। এখন dn_s বা P বিন্দু থেকে S ও $S + dS$ দূরত্বের মধ্যে পতিত অণুর সংখ্যা (4.6.1 এর সাহায্যে)

$$dn_s = K'e^{-(S_o/S)^2} S^{-5} dS$$

এখানে $K' =$ অপর এক ধ্রুবক, $S_o = \frac{A}{\alpha}$ বা সর্বাধিক সম্ভাব্য গতিবেগের জন্য S এর মান। K' এর মান $\int dn_s = n$ সম্পর্ক থেকে বার করা যায় ঃ

$$n = \int_0^\infty K'e^{-(S_o/S)^2} S^{-5} dS = \frac{K'}{2S_o^4}$$

$$\text{অথবা } K' = 2nS_o^4$$

$$\text{বা } dn_s = 2nS_o^4 S^{-5} e^{-(S_o/S)^2} dS$$

$$= 4aI_o S_o^4 S^{-5} e^{-(S_o/S)^2} dS \qquad 4.6.3$$

এই dn_s সংখ্যক অণু কাঁচের প্লেটের উপর P বিন্দু থেকে $S-a$ ও $S+a$ দূরত্বের মধ্যে সমানভাবে পতিত হবে। P বিন্দু থেকে প্রকৃত দূরত্বকে যদি x বলা যায় তবে এই dn_s সংখ্যক অণুর $\frac{dn_s}{2a}.dx$ অণু x থেকে $x+dx$ দূরত্বের মধ্যে পতিত হবে। x থেকে $x+dx$ দূরত্বে পতিত অণুর মোট সংখ্যা

$$dN_x = \frac{dx}{2a} \int_{S=x-a}^{x+a} dn_s$$

অতএব কাঁচের প্লেটে প্রলেপের গভীরতা

$$I = \frac{dN_x}{dx} = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} dn_s$$

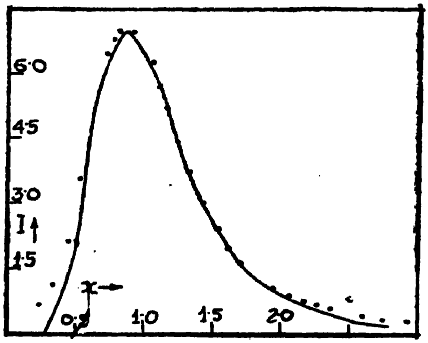
$$= 2I_0 S_0^4 \int_{x-a}^{x+a} S^{-5}\, e^{-(S_0/S)^2}\, dS$$

$$= 2I_0 \int_{\frac{S_0}{x+a}}^{\frac{S_0}{x-a}} u^3\, e^{-u^2}\, du \qquad \left(u = \frac{S_0}{S}\right)$$

$$= I_0 \left[e^{-\left(\frac{S_0}{x-a}\right)^2} \left\{ \left(\frac{S_0}{x-a}\right)^2 + 1 \right\} - e^{-\left(\frac{S_0}{x+a}\right)^2} \left\{ \left(\frac{S_0}{x+a}\right)^2 + 1 \right\} \right] \tag{4.6.4}$$

এই সূত্রে I_0 এবং a এর মান পূর্বেই জ্ঞাত আছে। s_0 এর মান চুল্লীর উষ্ণতা, n_r ও d এর মান থেকে নির্ণয় করা যায়। ৪.৫ চিত্রে রেখার সাহায্যে I এর প্রত্যাশিত মান এবং বিন্দুর সাহায্যে কো এর পরিমাপলব্ধ মান দেখানো হ'য়েছে। প্রত্যাশিত মান নির্ধারণে বিসমাথ অণুরশ্মির মধ্যে 44% অণু Bi, 54% Bi_2 ও 2% Bi_3 বলে ধরা হ'য়েছে। মোটামুটিভাবে পরীক্ষালব্ধ বিন্দুগুলি প্রত্যাশিত লেখের সংগে মেলে। অবশ্য কিছুটা গরমিল এক্ষেত্রে

অবশ্যম্ভাবী কেননা অণুরশ্মির মধ্যে কিছু Bi_8 অণুও থাকে এবং রশ্মির প্রকৃত সংযুতি (composition) সঠিকভাবে জ্ঞাত নয়।

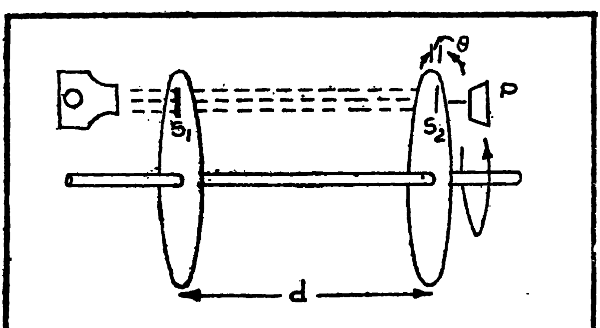


চিত্র ৪'৫—কো এর পরীক্ষালব্ধ ফল

(খ) বেগনির্বাচক প্রণালী

এখানে অণুরশ্মিকে এমন কোন ব্যবস্থার মধ্য দিয়ে প্রেরণ করা হয় যাতে কেবল নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে গতিবেগবিশিষ্ট অণুগুলিই নির্গত হতে পারে। এই অণুগুলির প্রাচুর্য্য এখন পৃথকভাবে মাপা যায়। যে সকল বিজ্ঞানী এই পদ্ধতি ব্যবহার করেন তাদের মধ্যে আছেন স্টার্ন (1926), কোস্টা, স্মাইথ ও কম্পটন (Costa, Smyth & Compton 1927) ও ল্যামার্ট (Lammert, 1929)। শেষোক্ত জনের পরীক্ষা এখানে আলোচিত হবে।

ল্যামার্টের পরীক্ষা: এই পরীক্ষায় অণুরশ্মি নির্বাতকক্ষে রক্ষিত দুইটি ঘূর্ণ্যমান সমাক্ষ চক্রের ব্যাসার্ধ বরাবর কর্তিত স্লিটের মধ্য দিয়ে চালিত



চিত্র ৪'৬—ল্যামার্টের পরীক্ষা

হয় (চিত্র ৪.৬) চক্রদ্বয়ের প্রতি ঘূর্ণনে O চুল্লী থেকে পারদঅণুর একটি গুচ্ছ

প্রথম চক্রের স্লিট s_1 এর মধ্য দিয়ে নির্গত হয়। এই অণুগুলির বেগ 4.6.2 সূত্রানুযায়ী বণ্টিত থাকে। দ্বিতীয় চক্রের স্লিট s_2 s_1 অপেক্ষা θ কোণ পশ্চাতে থাকে। চক্রদ্বয় যদি একক সময়ে n বার ঘূর্ণিত হয় তবে s_1 থেকে নির্গত অণুরশ্মির পথে আসতে s_2 স্লিটের $\frac{\theta}{2n\pi}$ সময় লাগে। যে সমস্ত অণু চক্রদ্বয়ের মধ্যের দূরত্ব d অতিক্রম করতে এর সমান সময় নেয় কেবল সেগুলিই s_2 এর মধ্য দিয়ে নির্গত হ'তে পারে। এই অণুগুলির গড় গতিবেগ

$$V = \frac{2n\pi d}{\theta} \tag{4.6.5}$$

বস্তুতঃ স্লিটগুলির কিছুটা প্রস্থ থাকার ফলে নির্গত অণুগুলির গতিবেগের কিছুটা বিস্তার থাকে।

দ্বিতীয় চক্রের পশ্চাতে তরলবায়ু দ্বারা হিমায়িত একটি কাঁচের প্লেট P থাকে। এই প্লেটের উপর পারদঅণুর প্রলেপসৃষ্টি হয় এবং এই প্রলেপ দৃশ্যমান হ'তে যে সময় লাগে অণুরশ্মির মধ্যে উল্লিখিত গতিবেগের অণুর প্রাচুর্য্য তার ব্যস্তানুপাতী ব'লে ধরা যায়। বিভিন্ন গতিবেগ সীমার মধ্যে অণুর আপেক্ষিক প্রাচুর্য্য এই পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায় এবং সেগুলিকে প্রত্যাশিত প্রাচুর্য্যের সংগে মিলিয়ে ম্যাক্সওয়েলীয় সূত্রের সত্যতা নির্ধারণ করা যায়।

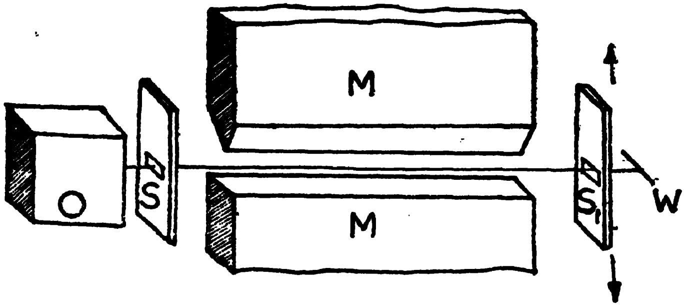
প্রকৃতপক্ষে চক্রদ্বয়ের উপর একাধিক স্লিট থাকে নচেৎ পারদপ্রলেপ দৃশ্যমান হ'তে অত্যন্ত বেশী সময় নেয়। উচ্চগতির কিছু অণু দ্বিতীয় চক্রের যে স্লিট দিয়ে নির্গত হয়, কিছু অল্পগতির অণু প্রথম চক্রে একই স্লিট দিয়ে বার হ'লেও দ্বিতীয় চক্রে তার পরবর্তী স্লিট দিয়ে বার হ'তে পারে। ফলে এই পদ্ধতিতে অতি দ্রুত ও অতি মন্দগতি অণুর আপেক্ষিক প্রাচুর্য্য নির্ণয় করতে অসুবিধা হয়।

(গ) অণুর চৌম্বক বিক্ষেপণ প্রণালী

অসমসত্ব চৌম্বকক্ষেত্রে চৌম্বক দ্বিমেরুবিশিষ্ট অণুর বিক্ষেপণ ঘটে। এই বিক্ষেপণ অণুর বেগের উপর নির্ভরশীল, কাজেই বিক্ষেপণের মাত্রা থেকে অণুর বেগের ধারণা করা যায়।

মাইসনার ও শেফার্স (Meissner & Scheffers, 1933) এই পদ্ধতিতে ম্যাক্সওয়েলীয় সূত্রের যাথার্থ্য প্রতিপন্ন করেন। তাঁদের পরীক্ষায় ব্যবহৃত যন্ত্রের বিন্যাস ৪.৭ চিত্রে দেখানো হ'ল। চুল্লী O থেকে পটাশিয়াম

বা লিথিয়ামের এক-পরমাণুক অণুর রশ্মি অনুভূমিক স্লিট s এর মধ্য দিয়ে বার হ'য়ে এক নির্বাত কক্ষের মধ্যে উল্লম্ব চৌম্বক ক্ষেত্র H_z এর মধ্য দিয়ে



চিত্র ৪'৭

গমন করে। এই চৌম্বক ক্ষেত্রের নতিমাত্রা (gradient) $\frac{dH_z}{dz}$ ও প্রবল। বিশেষ আকৃতির মেরুবিশিষ্ট চুম্বকের (M) সাহায্যে এরূপ চৌম্বক ক্ষেত্রের সৃষ্টি হয়। চৌম্বক ক্ষেত্রের মধ্যে পরমাণুর দ্বিমেরু এমনভাবে বিন্যস্ত হয় যাতে চৌম্বক ভ্রামকের (magnetic moment) উল্লম্ব উপাংশ হয় $gm\mu_B$ (g = লাণ্ডের অনুপাত ; যদি কৌণিক ভরবেগের মোট কোয়াণ্টাম সংখ্যা j হয় তবে $m = j$ ও $-j$ এর মধ্যবর্তী কোন পূর্ণসংখ্যা ; $\mu_B = \frac{eh}{4\pi mc}$ বা বোর ম্যাগনেটন)। এই দ্বিমেরুর উপর $gm\mu_B \cdot \frac{dH_z}{dz}$ বল ক্রিয়া করে এবং তার ফলে M ভরবিশিষ্ট পরমাণুর $\frac{gm\mu_B}{M} \cdot \frac{dH_z}{dz}$ ত্বরণ হয়। ধরা যাক্ কোন পরমাণু c গতিবেগে চৌম্বক ক্ষেত্রের মধ্যে l দৈর্ঘ্য অতিক্রম করে। l দৈর্ঘ্যের পরে এই পরমাণুর মোট বিক্ষেপণ হবে

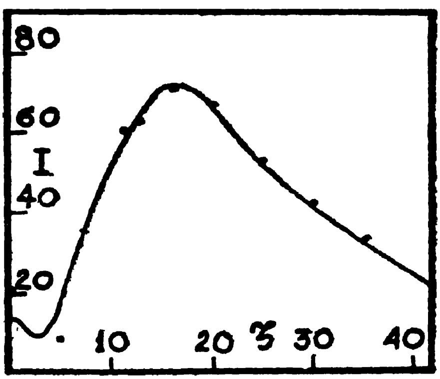
$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{gm\mu_B}{M} \cdot \frac{dH_z}{dz}\right) \cdot \left(\frac{l}{c}\right)^2 \qquad 4.6.6$$

লিথিয়াম বা পটাশিয়াম পরমাণুর ক্ষেত্রে $j = \frac{1}{2}$, $g = 2$, অর্থাৎ

$$\zeta = \pm\frac{\mu_B}{2M} \cdot \frac{dH_z}{dz} \cdot \frac{l^2}{c^2}$$

পূর্বেই দেখা গেছে যে অণুরশ্মির মধ্যে c এর বণ্টন 4.6.2 সূত্র অনুযায়ী হয়। সুতরাং ζ এর মানও তদনুযায়ী বণ্টিত হয়।

অণুর বিক্ষেপণ সূক্ষ্মভাবে নির্ণয় করার জন্য অণুরশ্মিকে একটি সূক্ষ্ম অনুভূমিক স্লিটের (s) উপর ফেলা হয়। এই স্লিটের পশ্চাতে প্লাটিনাম বা অন্য কোন ধাতুর একটি সূক্ষ্ম তার (w) থাকে। তারটিকে যদি উত্তপ্ত অবস্থায় রাখা যায় তবে স্লিটের মধ্য দিয়ে নির্গত অণুগুলি ঐ তারের উপর পতিত হ'য়ে পজিটিভ আয়নরূপে পুনর্বিকীর্ণ হয়। এর ফলে তারটির থেকে যে বিদ্যুৎ-প্রবাহ (I) সৃষ্ট হয়, সেটির পরিমাপ করলেই স্লিটের মধ্যে প্রবিষ্ট অণুরশ্মির তীক্ষ্ণতার আপেক্ষিক মান পাওয়া যায়। স্লিট ও তার পশ্চাদ্‌বর্তী তারটিকে মাইক্রোমিটার স্ক্রুর সাহায্যে ওঠানামা করানো যায়। চৌম্বকক্ষেত্রের অনুপস্থিতিতে স্লিটের যে অবস্থানে অণুরশ্মি স্লিটের উপর পড়ে, সেখান হ'তে উপরে ও নীচে ζ এর পরিমাপ করা হয়। লিথিয়ামের জন্য I এর প্রত্যাশিত ও লক্ষিত পরিবর্তন ৪.৮ চিত্রে দেখা যাবে। অতি অল্প বিক্ষেপণের ক্ষেত্রে ব্যতীত উভয়ের মধ্যে সুন্দর সমন্বয় দেখা যায়। অল্প বিক্ষেপণে I এর মান বেশী লক্ষিত হওয়ার কারণ এই যে লিথিয়াম অণুরশ্মির মধ্যে কিছু চৌম্বক দ্বিমেরুহীন Li_2 অণুও থাকে। চৌম্বক ক্ষেত্রে এগুলির কোন বিক্ষেপ ঘটে না।



চিত্র ৪.৮

পরোক্ষ উপায়

(ক) বর্ণালিরেখার প্রস্থ থেকে

আলোক বিকিরণকারী কোন উৎস যখন কোন দিকে গতিবেগ লাভ করে তখন ঐ গতিবেগের দিকে বিকীর্ণ আলোকের কম্পাঙ্কের নিম্নের সূত্র অনুযায়ী পরিবর্তন ঘটে ঃ

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{u}{c}\right) \qquad 4.6.7$$

এখানে ν ও ν_0 = পরিবর্তিত ও মূল কম্পাঙ্ক, c = আলোকের গতিবেগ ও u = বিকিরণের দিকে উৎসের গতিবেগের উপাংশ ($u << c$)। কম্পাঙ্কের এই পরিবর্তনকেই 'ডপলার অভিক্রিয়া' বলে। যদি মূল বিকিরণের বর্ণালিতে কোন প্রকৃত রেখা থাকে এবং বিকিরণকারী উৎসগুলির গতিবেগ ম্যাক্সওয়েলীয় সূত্র অনুযায়ী বণ্টিত থাকে তবে ডপলার ক্রিয়ার ফলে রেখাটির কিছুটা প্রসারণ ঘটবে। গতিবেগের কোন এক উপাংশ u 4.4.2 সূত্র অনুযায়ী বণ্টিত হবে, ফলে বর্ণালিরে খার উজ্জ্বলতা I_ν এর মান হবে

$$I_\nu = I_0 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2 \nu_0^2}(\nu-\nu_0)^2}$$

এখানে I_0 = মূল কম্পাঙ্ক ν_0তে উজ্জ্বলতার মান। কম্পাঙ্কের পরিবর্তে তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ ব্যবহার করলে এবং $\alpha^2 = \frac{2kT}{m}$ লিখলে পাওয়া যায়ঃ

$$I_\lambda = I_0 e^{-\frac{mc^2}{2kT} \cdot \frac{(\lambda-\lambda_0)}{\lambda_0^2}} \qquad 4.6.8$$

4.6.8 সূত্রের সত্যতা প্রমাণিত হ'লে পরোক্ষভাবে ম্যাক্সওয়েলীয় বণ্টনসূত্রও প্রতিপাদিত হয়। নানা উপায়ে 4.6.8 সূত্র পরীক্ষিত হয়েছে। সাধারণতঃ অল্প চাপে গ্যাসের মধ্যে যখন বিদ্যুৎ-প্রবাহ প্রেরিত হয় তখন গ্যাস পরমাণুগুলির রেখা-বর্ণালি পাওয়া যায় এবং ঘনত্ব অল্প হওয়ার ফলে কোন বহিপ্রভাব বর্ণালিরেখার প্রস্থ সঞ্জাত করে না। এই প্রকার রেখা-বর্ণালির আলোকচিত্র বর্ণালি-আলোকমিতির (spectro-photometry) সাহায্যে সূক্ষ্মভাবে পরীক্ষা করে 4.6.8 সূত্রের সঙ্গে মিলিয়ে দেখা যায়।

বর্ণালিরেখা প্রস্থহীন হ'লে ব্যতিচারজাত ডোরার (Fringe) স্পষ্টতা সব পর্য্যায়েই (Order) সমান থাকে। অপরপক্ষে বর্ণালিরেখার কিছুটা প্রস্থ থাকলে ডোরার স্পষ্টতা পর্য্যায় সংখ্যা বাড়ার সংগে কমতে থাকে এবং ক্রমশঃ সেগুলি অদৃশ্য হ'য়ে যায়। সর্বাধিক দৃশ্যমান পর্য্যায়সংখ্যা কিছুটা পর্য্যবেক্ষকের উপর নির্ভর করে। ডোরার মধ্যে সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন উজ্জ্বলতা I_1 ও I_2 হ'লে $\frac{I_1-I_2}{I_1+I_2}$ রাশিটিকে ডোরার 'স্পষ্টতা' বলে অভিহিত করা যাক। ফেব্রি ও বুসোঁর (Fabry and Buisson) মতে ডোরাশ্রেণী দৃশ্যমান হ'তে স্পষ্টতার মান কমপক্ষে $\frac{1}{18}$ হওয়া প্রয়োজন। আলোক-উৎসের বেগবণ্টন ম্যাক্সওয়েলীয় হ'লে সেক্ষেত্রে সর্বাধিক দৃশ্যমান পর্য্যায়সংখ্যা হবে

$$n_{max} = 1{\cdot}22 \times 10^6 \sqrt{\frac{M}{T}} \; (M = \text{আণবিক ভর}) \qquad 4.6.9$$

ফেব্রি ও বুসোঁ ফেব্রি-পেরো ব্যতিচারমান যন্ত্রের (Fabry-Perot interferometer) সাহায্যে, উৎস হিসাবে তাপস্থাপকের মধ্যে রক্ষিত বিভিন্ন গ্যাসে পূর্ণ গাইসলার-টিউবব্যবহার ক'রে বিভিন্ন উষ্ণতায় n_{max} এর মান নির্ণয়করেন। নির্ণীত মান 4.6.9 সূত্র থেকে নির্ধারিত মানের সংগে মেলে।

অবশ্য এই উপায়ে বেগবণ্টন যে অবশ্যই ম্যাক্সওয়েলীয় একথা প্রমাণ হয় না। তবে আলোকের পরমাণু-উৎসগুলির যে গতিবেগ আছে এবং সেই বেগ ম্যাক্সওয়েলীয় ধরণেরই কোন বণ্টনসূত্র মেনে চলে একথা প্রমাণিত হয়।

(খ) তাপায়ণীয় তড়িৎপ্রবাহের মান থেকে

কোন ধাতুর ফিলামেণ্টকে অতিমাত্রায় উত্তপ্ত করলে তার থেকে ইলেকট্রন নির্গত হয়। নির্গত ইলেকট্রনসমূহের গতিবেগের বণ্টন ধাতুর অভ্যন্তরে ইলেকট্রনের বেগবণ্টনের প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল। ধাতুর মধ্যস্থ ইলেকট্রন-গুলিকে ধাতুর উষ্ণতায় অবস্থিত গ্যাসরূপে কল্পনা করা যায়। বাহিরের তুলনায় ধাতুর অভ্যন্তরে বিভবের মান ϕ পরিমাণ অধিক, অর্থাৎ ইলেকট্রনের স্থৈতিক শক্তি $e\phi$ পরিমাণ (ইলেকট্রনের বৈদ্যুতিক আধান $= -e$) কম হওয়ায় নির্গত হওয়ার জন্য ধাতুগাত্রের লম্ব অভিমুখে ইলেকট্রনের গতিবেগ কোন নিম্নতম মান u_0 অপেক্ষা অধিক হওয়া প্রয়োজন। স্পষ্টতঃই

$$e\phi = \tfrac{1}{2} m u_0^2 \qquad 4.6.10$$

ধাতুগাত্র থেকে মোট বিদ্যুৎপ্রবাহ নির্ণয় করতে হ'লে u_0 অপেক্ষা অধিক অভিলম্ব গতিবেগে ধাতুগাত্রে পতিত ইলেকট্রনের সংখ্যা নির্ধারণ করা প্রয়োজন। ধাতুগাত্রের উপর x অক্ষের উপর লম্ব এমন এক তল δs নেওয়া যাক। δs এর উপর $u\delta t$ উচ্চতার এক বেলনাকৃতি আয়তন কল্পনা করা যাক। $u\delta t\ \delta s$ পরিমাণ এই আয়তনের মধ্যে $nu\delta t\ \delta s . f(u)du$ সংখ্যক ইলেকট্রনের গতিবেগ δs অভিমুখে u ও $u + du$ এর মধ্যে থাকবে। যেহেতু গতিবেগের x-উপাংশই ইলেকট্রনকে δs এর মধ্য দিয়ে পরিচালিত করে অতএব অন্য উপাংশদ্বয়কে উপেক্ষা করা যেতে পারে। এই $nu\delta t\ \delta s\, f(u)du$ সংখ্যক ইলেকট্রন δt সময়ে δs তল থেকে নির্গত হবে। অতএব প্রতি সেকেণ্ডে প্রতি একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট তলের মধ্য দিয়ে u_0 বা ততোধিক মানের গতি-বেগের x-উপাংশবিশিষ্ট ইলেকট্রনের সংখ্যা

$$\int_{u_0}^{\infty} nu \cdot \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\, e^{-u^2/a^2} du = \frac{na}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u_0^2}{a^2}}$$

অর্থাৎ তাপায়নীয় তড়িৎ প্রবাহের নিবিড়তা (Thermionic current density)

$$i = \frac{nea}{2\sqrt{\pi}} e^{-u_0/a^2}$$

$$= ne\sqrt{\frac{k}{2m\pi}}\ \sqrt{T}\ e^{-\frac{mu_0^2}{2kT}} \quad \left(\because\ a = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\right)$$

এখন $ne\sqrt{\dfrac{k}{2m\pi}} = A$ এবং $\dfrac{mu_0}{2k} = b$ লিখলে

$$i = A\sqrt{T}\ e^{-\frac{b}{T}} \qquad 4.6.11$$

উষ্ণতা T এর উপর i এর নির্ভরশীলতা পরীক্ষার সাহায্যে সহজেই প্রতিপন্ন করা যায়।

উপরের সূত্র থেকে এছাড়াও দেখানো যায় যে যেসকল ইলেকট্রন u_1 বা ততোধিক অভিলম্ব গতিবেগ নিয়ে ধাতুগাত্র থেকে নির্গত হয় কেবলমাত্র সেগুলির সৃষ্ট তড়িৎপ্রবাহের মান

$$i_{u_1} = i_0\ e^{-\frac{mu_1^2}{2kT}} \qquad 4.6.12$$

শেষোক্ত সূত্রের সত্যতা নির্ধারণের জন্য রিচার্ডসন ও ব্রাউন এক পরীক্ষা করেন। এই পরীক্ষায় উত্তপ্ত ফিলামেণ্ট থেকে নির্গত ইলেকট্রন ফিলামেণ্ট অপেক্ষা ঋণাত্মক বিভবে রক্ষিত ধাতব পাতে সংগৃহীত হয়। ফিলামেণ্ট ও পাতের বিভব প্রভেদ $\dfrac{mu_1^2}{2e} = V$ হলে কেবলমাত্র eV অথবা $\frac{1}{2}mu_1^2$ অপেক্ষা অধিক গতীয়শক্তি সম্পন্ন ইলেকট্রনই সংগ্রাহকে পৌঁছাতে পারবে অর্থাৎ i_{u_1} তড়িৎপ্রবাহ সংগৃহীত হবে। i_{u_1} ও V এর সম্পর্ক

$$i_{u_1} = i_0\ e^{-\frac{ev}{kT}} \qquad 4.6.13$$

এই সম্পর্কের সত্যতা সহজেই উপরের পরীক্ষায় প্রমাণ করা যায়।

এই প্রসঙ্গে মনে রাখা প্রয়োজন যে ধাতুমধ্যস্থ ইলেকট্রন গ্যাস প্রকৃতপক্ষে ম্যাক্সওয়েলীয় বণ্টনসূত্র পালন করে না। ইলেকট্রন যেহেতু পাউলীর অপবর্জন নীতি (exclusion principle) মেনে চলে সেইহেতু ইলেকট্রনগ্যাস ফার্মি-ডিব্যাক বণ্টনসূত্র পালন করে। তবে উচ্চ উষ্ণতায় অন্তত অধিক

গতিশক্তি বিশিষ্ট ইলেকট্রনগুলির বেগবণ্টন মোটামুটিভাবে ম্যাক্সওয়েলীয় সূত্র অনুসরণ করে এবং তার ফলেই ফিলামেণ্ট থেকে নির্গত ইলেকট্রগুলিকে ম্যাক্সওয়েলীয় বেগবণ্টন প্রতিপালন করতে দেখা যায়।

৪.৭ স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা, ম্যাক্সওয়েল সূত্রে বোল্‌ৎস্‌মানের সংযোজন ও গতীয় শক্তির সমবিভাজন নীতি

যে সংখ্যক পারস্পরিক সম্পর্কবিহীন নির্দেশাংকের সাহায্যে কোন বস্তুসমষ্টির অবস্থার পূর্ণ বর্ণনা দেওয়া যায় তাকেই ঐ বস্তুসমষ্টির স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা (degree of freedom) বলে।

সাধারণভাবে x, y, z নির্দেশতন্ত্রে চলনশীল কোন বিন্দুভরের স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা 3। যৌথভাবে দুইটি বস্তুসমষ্টির স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা পৃথকভাবে বস্তুসমষ্টিদ্বয়ের স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার যোগফল। অর্থাৎ পূর্বে আলোচিত আদর্শগ্যাস অণুর মত N সংখ্যক বিন্দুভরের স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা সাধারণভাবে $3N$। কিন্তু যদি বিন্দুভরগুলির অবস্থানের উপর ν-সংখ্যক পরস্পর সম্পর্কহীন বাধা আরোপ করা যায় তবে স্বাতন্ত্র্যসংখ্যারও ν পরিমাণ হ্রাস ঘটে।

উদাহরণস্বরূপ N সংখ্যক বিন্দুভর $(m_1, m_2 \ldots, m_N)$ দ্বারা রচিত এক দৃঢ়বস্তু (Rigid body) কল্পনা করা যাক। দৃঢ়বস্তুর মধ্যে প্রতি দুই বিন্দুভরের মধ্যে দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে, সুতরাং m_i ও m_j এই দুই বিন্দুভরের মধ্যে দূরত্ব r_{ij} = স্থির রাশি। বিন্দুভরগুলির যে কোনও একটি, ধরা যাক m_1, যথেচ্ছভাবে স্থাপিত হ'তে পারে। দ্বিতীয় বিন্দুভর m_2 m_1 থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে থাকবে এবং তার ফলে r_{12} = স্থির রাশি, এই একটি বাধা আরোপিত হবে। তৃতীয় বিন্দুভরের ক্ষেত্রে r_{13} = স্থির রাশি ও r_{23} = স্থির রাশি—এই দুইটি বাধা আরোপিত হবে। এর পর অন্য যে কোনও তিনটি বিন্দুভর থেকে m_4, m_5 ইত্যাদির প্রতিটির দূরত্ব নির্দিষ্ট হলেই বিন্দুভরগুলি স্ব-স্বস্থানে সন্নিবিষ্ট হবে অর্থাৎ আরও মোট $3(N-3)$ সংখ্যক বাধা বিন্দুভরগুলির অবস্থানের উপর আরোপ করা হবে। দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্যসংখ্যাও $3N$ এর পরিবর্তে $3N-[1+2+3(N-3)]=6$ হবে। অন্যভাবে দেখা যায় যে দৃঢ়বস্তুর যে কোনও একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর তিনটি অবস্থান নির্দেশাংক এবং বস্তুটির কৌণিক অবস্থান বোঝাতে তিনটি অয়লারীয় কোণ (Eulerian angles) θ, ϕ ও ψ—এই ছয়টি রাশির সাহায্যে কোন দৃঢ়বস্তুর অবস্থানের পূর্ণ বর্ণনা দেওয়া সম্ভব। সুতরাং দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা এই ভাবেও 6 বলে বোঝা যায়।

স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার সংজ্ঞা অন্যভাবেও দেওয়া চলে। কোন বস্তুসমষ্টির গতীয় শক্তি উপযুক্ত নির্দেশতন্ত্রে যদি কিছু সংখ্যক পারস্পরিক নির্ভরতাবিহীন ভরবেগীয় নির্দেশাংকের সমমাত্র (homogeneous) দ্বিঘাত (quadratic) অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা যায়, তবে ঐ অপেক্ষকের মধ্যে দ্বিঘাত রাশির সংখ্যাই বস্তুসমষ্টির স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা। এখানে কয়েকটি বিভিন্ন ধরণের বস্তুসমষ্টির গতীয় শক্তি ও স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার তালিকা দেওয়া হ'ল। স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার দ্বিতীয় সংজ্ঞাটির যাথার্থ্য এর থেকে বোঝা যাবে। এই তালিকায় m ও M যথাক্রমে বিন্দুভর ও বস্তুসমষ্টির ভর, $p_{x,\,y,\,z}$ ও $P_{x,\,y,\,z}$ যথাক্রমে বিন্দুভর ও বস্তুসমষ্টির রৈখিক ভরবেগ-উপাংশ, $L_{x,\,y,\,z}$ বস্তুসমষ্টির মুখ্য অক্ষত্রয়ে কৌণিক ভরবেগ-উপাংশ, $I_{x,\,y,\,z}$ বস্তুসমষ্টির জাড্য ভ্রামক (principal moments of inertia) এবং p_c বিন্দুভরযুগ্মের ক্ষেত্রে প্রতিটির (ভরকেন্দ্রিক নির্দেশতন্ত্রে) ভরবেগ।

বস্তুসমষ্টির প্রকৃতি	গতীয় শক্তির রাশিমালা	স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা
1. x-অক্ষে চলনশীল বিন্দুভর	$\frac{p_x^2}{2m}$	1
2. x, y ও z অক্ষে চলনশীল বিন্দুভর	$\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}$	3
3. x, y ও z অক্ষে চলনশীল এবং যে কোনও অক্ষে ঘূর্ণনশীল দৃঢ়বস্তু	$\frac{1}{2M}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{L_x^2}{I_x}+\frac{L_y^2}{I_y}+\frac{L_z^2}{I_z}\right)$	6
4. স্থির ভরকেন্দ্রবিশিষ্ট কম্পনশীল বিন্দুভরযুগ্ম	$\frac{p_c^2}{m}$	1

৪.১ সারণী

ম্যাক্সওয়েলসূত্রে বোল্‌ৎস্‌মানের সংযোজন

পূর্বের আলোচনা থেকে প্রতীয়মান হয় যে কোনও বস্তুসমষ্টির স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা যদি n হয় তবে n সংখ্যক নির্দেশাংক দ্বারা ঐ বস্তুসমষ্টির অবস্থার পূর্ণ বর্ণনা দেওয়া সম্ভব। এই নির্দেশাংকগুলির কোনটি রৈখিক, কোনটি কৌণিক ইত্যাদি হ'তে পারে। প্রকৃতি নির্বিশেষে নির্দেশাংকগুলিকে $q_1, q_2, \ldots q_n$ দ্বারা

নির্দেশিত করা যাক। 'q'-গুলিকে বস্তুসমষ্টির ব্যাপক নির্দেশাংক (generalised coordinates) বলা হয়। অনুরূপভাবে $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2 \cdots \dot{q}_n$-কে বস্তুসমষ্টির ব্যাপক গতিবেগের উপাংশ হিসাবে ধরা যায়।

বস্তুসমষ্টির মোট শক্তি E, গতীয় শক্তি L ও স্থৈতিক শক্তি V এর যোগফল। স্থৈতিক শক্তি V কেবলমাত্র নির্দেশাংক 'q_i'-গুলির উপর নির্ভর করতে পারে। অপর পক্ষে গতীয় শক্তি L '$\dot{q}_i$' সমূহের সমমাত্র দ্বিঘাত অপেক্ষক হয়। অর্থাৎ গতীয় শক্তির সূত্র এইভাবে লেখা যায়ঃ

$$L = \sum_{i, j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad 4.7.1$$

এখানে সহগ 'a_{ij}' গুলি '$\dot{q}_i$' ইত্যাদির উপর নির্ভরশীল নয় তবে সাধারণভাবে সেগুলি 'q_i' গুলির উপর নির্ভর করতে পারে।

যে কোনও নির্দেশাংক 'q_i' এর সংগে জড়িত ব্যাপক ভরবেগকে p_i বলা যাক। সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$p_i = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \qquad 4.7.2$$

প্রতি ব্যাপক ভরবেগ p_i '$\dot{q}_i$' সমূহের একঘাত অপেক্ষক হবে। বিপরীতভাবে '$\dot{q}_i$' সমূহের প্রতিটিকে 'p_i' সমূহের একঘাত অপেক্ষক হিসাবে লেখা যেতে পারবে। 4.7.1 সূত্রে '$\dot{q}_i$' এর সেই রাশিমালা (expression)-গুলিকে স্থাপিত করলে পাওয়া যায়

$$L = \sum_{i \; j} b_{ij} \; p_i p_j \qquad 4.7.3$$

অর্থাৎ গতীয় শক্তিকে ব্যাপক ভরবেগসমূহের সমমাত্র দ্বিঘাত অপেক্ষক হিসাবে দেখা যেতে পারে। স্পষ্টতঃই মোট শক্তি E, p_i ও q_i, সবগুলির উপরই নির্ভর করে। ব্যাপক নির্দেশাংক ব্যবহার করে নিম্নের আকারে লেখা যায়ঃ

$$F(\dot{q}_1, \dot{q}_2 \cdots \dot{q}_n) d\dot{q}_1 d\dot{q}_2 \cdots d\dot{q}_n = Ce^{-L/kT} d\dot{q}_1 d\dot{q}_2 \cdots d\dot{q}_n$$

$$(C = \text{ধ্রুবক}) \qquad 4.7.4$$

এখানে সমীকরণের বামদিকের রাশি অণুসমষ্টির যে অংশের ব্যাপক গতিবেগের উপাংশগুলি $(\dot{q}_1, \dot{q}_1 + d\dot{q}_1)$, $(\dot{q}_2, \dot{q}_2 + d\dot{q}_2) \cdots$ ইত্যাদি সীমার মধ্যে অবস্থিত সেই অংশটিকে নির্দেশিত করে।

বোল্‌ৎস্‌মান 4.7.4 সূত্রের ব্যাপকতর প্রয়োগ করেন। তিনি প্রমাণ করেন অণুসমষ্টির যে অংশের ব্যাপক নির্দেশাংক (q_1, q_1+dq_1) ইত্যাদি সীমার মধ্যে এবং ব্যাপক ভরবেগ (p_1, p_1+dp_1) ইত্যাদি সীমার মধ্যে থাকবে তার মান

$$F(q_1\cdots q_n, p_1\cdots p_n)\, dq_1\cdots dq_n\, dp_1\cdots dp_n$$
$$= Ce^{-E/kT}\, dq_1\cdots dq_n\, dp_1\cdots dp_n \qquad 4.7.5$$

C এখানে অপর কোন ধ্রুবক। 4.7.4 সূত্রে নির্দেশাংকসমূহের অন্তর্ভুক্তি এবং শুধুমাত্র গতীয় শক্তি Lএর পরিবর্তে মোট শক্তি E এর ব্যবহারই বোল্‌ৎস্‌মানের সংযোজন।

গতীয় শক্তির সমবিভাজন নীতি

নির্দিষ্ট উষ্ণতায় যদি কোন বস্তুসমষ্টি সাম্যতা লাভ করে তবে তার মোট গতীয় শক্তি বিভিন্ন প্রকার স্বাতন্ত্র্যের মধ্যে সমানভাবে বণ্টিত হয় এবং প্রত্যেক প্রকার স্বাতন্ত্র্যের জন্য গতীয় শক্তির পরিমাণ $\frac{1}{2}kT$ হয়। এখানে k = বোল্‌ৎস্‌মান ধ্রুবক ও T = নিরপেক্ষ উষ্ণতা। এই নীতিকেই গতীয় শক্তির সমবিভাজন নীতি বলা হয়। এই নীতি এখন প্রমাণিত হবে।

4.7.3 সূত্রে n-সংখ্যক ব্যাপক ভরবেগ 'p_i' ব্যবহার করা হ'য়েছে। ব্যাপক ভরবেগগুলির পরিবর্তে সেগুলির n-সংখ্যক একঘাত সমমাত্র অপেক্ষক ব্যবহার করা যেতে পারে যেগুলিকে এইভাবে লেখা যায়ঃ

$$\xi_i = \sum_j c_{ij} p^j$$

'ξ_i' রাশিগুলিকে 'উপভরবেগ' বলা যেতে পারে। এগুলিকে এমনভাবে নির্বাচিত করা হয় যাতে 4.7.3 সূত্রের পরিবর্তে গতীয় শক্তিকে

$$L = \sum_i \beta_i \xi_i^2 \qquad 4.7.6$$

এইরূপে প্রকাশ করা যায়। 4.7.5 সূত্রকেও অনুরূপভাবে পরিবর্তিত রূপে লেখা যেতে পারেঃ

$$F(q_1\cdots q_n, \xi_1\cdots\xi_n)dq_1\cdots dq_n d\xi_1\cdots d\xi_n$$
$$= Ce^{-E/kT}\, dq_1\cdots dq_n\,.\, d\xi_1\cdots d\xi_n \qquad 4.7.7$$

এখন এই n-সংখ্যক 'উপভরবেগ' বা 'ξ' এর যে কোনওটির সংগে যুক্ত গতীয় শক্তির গড় মান নির্ণয় করা যেতে পারে। মোট শক্তি E এর মধ্যে কোন এক বিশেষ উপভরবেগ ξ_i এর উপর নির্ভরশীল শক্তির পরিমাণ $\beta_j \xi_j^2$। মোট শক্তির বাকী অংশে যদি E' হয় তবে

$$E = E' + \beta_j \xi_j^2$$

4.7.7 সূত্রে 'E'এর এই রাশিমালা ব্যবহার ক'রে সমীকরণের দুই পার্শ্বকে $q_1 \cdots q_n$ ও $\xi_1 \cdots \xi_n$ এই $2n$-সংখ্যক রাশির সকল সম্ভবপর মানের জন্য সমাকলন করলে পাওয়া যায় ঃ

$$\int_{2n} Ce^{-(E' + \beta_j \xi_j)/kT} dq \cdots dq_n \, d\xi_1 \cdots d\xi_n = 1$$

অর্থাৎ $$C = \frac{1}{\int_{2n} e^{-(E' + \beta_j \xi_j^2)/kT} dq_1 \cdots dq_n \cdot d\xi_1 \cdots d\xi_n} \qquad 4.7.8$$

'ξ_j' উপভরবেগের সংগে যুক্ত গতীয় শক্তি $\beta_j \xi_j^2$ এর গড় মান

$$\int_{2n} \beta_j \xi_j^2 \cdot Ce^{-(E' + \beta_j \xi_j^2)/kT} dq_1 \cdots dq_n \cdot d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

অথবা, 4.7.8 সূত্র থেকে c এর মান ব্যবহার ক'রে

$$\frac{\int_{2n} \beta_j \xi_j^2 \, e^{-(E' + \beta_j \xi_j^2/kT)} dq_1 \ldots dq_n \, d\xi_1 \ldots d\xi_n}{\int_{2n} e^{-(E' + \beta_j \xi_j^2)/kT} dq_1 \ldots dq_n \, d\xi_1 \ldots d\xi_n}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \beta_j \xi_j^2 \, e^{-\frac{\beta_j \xi_j^2}{kT}} d\xi_j \int_{2n-1} e^{-E'/kt} dq_1 \ldots dq_n d\xi_1 \ldots d\xi_{j-1} d\xi_{j+1} \ldots d\xi_n}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta_j \xi_j^2}{kT}} d\xi_j \int_{2n-1} e^{-E'/kt} dq_1 \ldots dq_n \, d\xi_1 \ldots d\xi_{j-1} \, d\xi_{j+1} \ldots d\xi_n}$$

$$= \tfrac{1}{2}kT \qquad 4.7.9$$

অর্থাৎ যে কোনও উপভরবেগের সংগে যুক্ত গতীয় শক্তির গড় মান $\frac{1}{2}kT$। তবে বস্তুসমষ্টির ব্যাপক ভরবেগ বা উপভরবেগের সংখ্যা স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার সমান। কাজেই বলা যেতে পারে যে এই $\frac{1}{2}kT$ পরিমাণ গতীয় শক্তি প্রতি স্বাতন্ত্র্যের সংগেই সংশ্লিষ্ট থাকে।

৪·৮ গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ

গতীয় শক্তির সমবিভাজন নীতি থেকে সহজেই গ্যাসের আপেক্ষিক তাপের মান নির্ণয় করা যায়। গ্যাস অণুর প্রতিটির স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা অণুর গঠনের উপর নির্ভর করে। এক পরমাণুক অণুর আচরণ বিন্দুভরের মত সুতরাং তার স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা 3। কাজেই এই অণুর গতীয় শক্তির গড় মান $\frac{1}{2}kt \times 3$ বা $\frac{3}{2}kt$। দ্বিপরমাণুক অণুর ক্ষেত্রে সাধারণ উষ্ণতায় তিনটি অক্ষে রৈখিক গতির জন্য 3 এবং অণুদ্বয়ের সংযোগকারী সরলরেখার সমদ্বিখণ্ডক তলে পরস্পর সমকোণে অবস্থিত দুই অক্ষের উপর ঘূর্ণনের জন্য 2—মোট স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা এই 5 হয়। এরূপ অণুর গতীয় শক্তির গড়মান অবশ্যই $\frac{5}{2}kT$। অবশ্য অধিক উষ্ণতায় অণুদ্বয়ের কম্পনের জন্য স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা আরও অধিক হ'তে পারে।

ধরা যাক্ কোন বিশেষ গ্যাস-অণুর স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা l। এক গ্র্যাম-অণু গ্যাসের জন্য, অর্থাৎ মোট N_0 (আভোগাড্রো সংখ্যা) অণুর স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা lN_0। এই অণু-সমষ্টির মোট গতীয় শক্তি $kT.\frac{1}{2}lN_0$ বা $\frac{1}{2}lRT$ এবং এই রাশি পূর্বোক্ত আভ্যন্তরীণ শক্তি 'U' এর সমান। স্থির আয়তনে গ্র্যাম-আণবিক আপেক্ষিক তাপ

$$C_V \text{ বা } \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{2}lR \qquad 4.8.1$$

(এখানে Q = এক গ্র্যাম-অণু গ্যাস কর্তৃক গৃহীত তাপ)

তাপগতিবিদ্যা থেকে জানা যায় স্থির চাপে গ্র্যাম-আণবিক আপেক্ষিক তাপ

$$C_P \text{ বা } \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ এবং $PV = RT$। সুতরাং

$$C_P = C_V + R = \left(1 + \frac{l}{2}\right)R \qquad 4.8.2$$

এবং দুই আপেক্ষিক তাপের অণুপাত

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{2}{l} \qquad 4.8.3$$

এই সূত্রানুসারে একপরমাণুক অণুর ক্ষেত্রে $\gamma = \frac{5}{3}$ $(l=3)$, সাধারণ উষ্ণতায় অর্থাৎ কম্পনজনিত স্বাতন্ত্র্য বিদ্যমান না থাকলে দ্বিপরমাণুক অণুর ক্ষেত্রে $\gamma = \frac{7}{5}$ $(l=5)$ এবং অধিকতর পরমাণুবিশিষ্ট অণুর ক্ষেত্রে $\gamma = \frac{4}{3}$ $(l=6)$.

হয়। গ্যাস-অণুর কম্পনজনিত স্বাতন্ত্র্য থাকলে γ এর মান স্বভাবতঃই আরও কম হবে। ৪.২ সারণীতে বিভিন্ন প্রকার গ্যাসের ক্ষেত্রে γ এর পরীক্ষালব্ধ মান দেওয়া হ'ল।

গ্যাস	উষ্ণতা (°C)	γ	γ_c*
He	0	1·63	1·667 (He, A)
A	0	1·667	
H_2	4	1·407	1·400 (H_2, O_2, N_2)
O_2	5	1·400	
N_2	20	1·401	
Cl_2	18	1·365	
CO_2	10	1·300	1·333 (CO_2 … C_2H_6)
,,	300	1·22	
,,	500	1·20	
H_2O	100	1·334	
CH_4	15	1·31	
C_2H_6	15	1·20	

৪.২ সারণী—বিভিন্ন প্রকার গ্যাসের ক্ষেত্রে γ এর মান

(* γ_C = অণুর কম্পনহীন অবস্থায় 4.8.3 সূত্র থেকে γ এর প্রত্যাশিত মান।)

৪.২ সারণী থেকে বোঝা যায় যে দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাতের প্রত্যাশিত ও পরীক্ষালব্ধ মানের মধ্যে সুন্দর সঙ্গতি বিদ্যমান। বহুপরমাণুক অণুর ক্ষেত্রে অণুর গঠনের জটিলতার সঙ্গে বিভিন্ন কম্পনজনিত স্বাতন্ত্র্যের উদ্ভব হয় ফলে γ এর মান কম্পনহীন অবস্থায় প্রত্যাশিত মানের তুলনায় ক্ষুদ্রতর হ'তে থাকে। Cl_2, Br_2 ইত্যাদি গ্যাসের ক্ষেত্রে পরীক্ষাগারের উষ্ণতাতেই যথেষ্ট পরিমাণ কম্পন উপস্থিত থাকে, ফলে এগুলির 'γ' অন্যান্য দ্বিপরমাণুক গ্যাসের তুলনায় কিছুটা কম হয়।

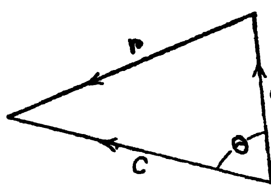
তবে আলোচিত তত্ত্বের সাহায্যে উষ্ণতার সংগে আপেক্ষিক তাপের পরিবর্তনের ব্যাখ্যা দেওয়া যায় না। C_P বা C_V এর যে কোনও পরিবর্তন $\frac{R}{2}$ এর কোন গুণিতকের সমান হওয়া উচিত, কেননা স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা কেবলমাত্র

পূর্ণসংখ্যাই হ'তে পারে। কিন্তু বাস্তবক্ষেত্রে আপেক্ষিক তাপের হ্রাস বা বৃদ্ধি ক্রমশঃ ঘটে, এই পরিবর্তন ধাপে ধাপে হয় না। বিশেষতঃ উষ্ণতা যত নিরপেক্ষ শূন্যের দিকে যেতে থাকে, আপেক্ষিক তাপও ততই শূন্যের নিকটবর্তী হয়। আপেক্ষিক তাপের পরিবর্তনের এই প্রকৃতি কণিকাবাদের সাহায্য ব্যতীত ব্যাখ্যা করা যায় না।

৪.৯ ম্যাক্সওয়েলীয় বেগবণ্টনসূত্র অনুযায়ী গড় অবাধপথের তাত্ত্বিক মান নিরূপণ

তৃতীয় অধ্যায়ে ক্লসিয়াসের পদ্ধতিতে গ্যাসঅণুর গড় অবাধপথের মান নির্ণীত হ'য়েছে (3.2.5 সূত্র)। অবাধপথের গড় নির্ণয়ের এই পদ্ধতিতে সকল অণুর গতিবেগ সমান ধরা হ'য়েছে। প্রকৃতপক্ষে অণুর গতিবেগ ম্যাক্সওয়েলীয় সূত্র অনুযায়ী বণ্টিত থাকে এবং অবাধপথের গড় নির্ণয়েও এই বণ্টনসূত্র প্রযুক্ত হবে।

পূর্বের মত ধরা যাক A অণুর গড় অবাধপথ নির্ণীত হবে এবং B অন্য কোনও অণু। A ও B অণুর গতিবেগ যথাক্রমে C ও C' এবং দুই গতিবেগের মধ্যস্থ কোণ θ (চিত্র ৪.৯)। B অণুর তুলনায় A অণুর



চিত্র ৪.৯

গতিবেগ ধরা যাক r। r সর্বদাই ধনাত্মক রাশি এবং

$$r^2 = c^2 + c'^2 - 2cc' \cos\theta \qquad 4.9.1$$

যখন $\theta = 0$, $r = |c - c'|$; যখন $\theta = \pi$, $r = c + c'$। θ কোণের θ ও $\theta + d\theta$ সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}\sin\theta\, d\theta$ (৩.২ অংশ দ্রষ্টব্য) সুতরাং θ কোণের বিভিন্ন মানের জন্য r এর গড় মান

$$\bar{r} = \int_{\theta=0}^{\pi} r \cdot \tfrac{1}{2} \sin\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2cc'}\int_{r=|c-c'|}^{(c+c')} r^2\,dr \qquad (\because\ r\,dr = cc'\sin\theta\,d\theta)$$

$$=\frac{1}{6cc'}\left[(c+c')^3-|c-c'|^3\right]$$

অর্থাৎ যদি $c > c'$ হয়, তবে $\bar{r}=c+\frac{c'^2}{3c}$

এবং যদি $c < c'$ হয়, তবে $\bar{r}=c'+\frac{c^2}{3c'}$ 4.9.2

এখন c ও c' এর বিভিন্ন মানের জন্য $\bar{r}$ এর গড় মান নির্ণয় করা প্রয়োজন। c' এর বিভিন্ন মানের জন্য $\bar{r}$ এর গড় মান ঃ

$$\frac{1}{n}\int_{c'=0}^{\infty}\bar{r}\,.\,dn_c'$$

$$=\int_{c'=0}^{\infty}\bar{r}\,.\,\frac{4}{\alpha^3\pi^{\frac{1}{2}}}\,e^{-c'^2/\alpha^2}\,c'^2\,dc' \quad \text{(4.4.3 সূত্র থেকে)}$$

$$=\frac{4}{\alpha^3\pi^{\frac{1}{2}}}\left[\int_{c'=0}^{c}\left(c+\frac{c'^2}{3c}\right)e^{-c'^2/\alpha^2}\,c'^2dc' + \int_{c'=c}^{\infty}\left(c'+\frac{c^2}{3c'}\right)e^{-c'^2/\alpha^2}\,c'^2dc'\right]$$

অনুরূপভাবে c এর বিভিন্ন মানের জন্য উপরের রাশির গড় মান ঃ

$$\nu=\int_{c=0}^{\infty}\frac{4}{\alpha^3\pi^{\frac{1}{2}}}\left[\int_{c=0}^{c}\left(c+\frac{c'^2}{3c}\right)e^{-\frac{c'^2}{\alpha^2}}\,c'^2dc' + \int_{c=c}^{\infty}\left(c'+\frac{c^2}{3c'}\right)e^{-\frac{c'^2}{\alpha^2}}\,c'^2dc'\right]\frac{4}{\alpha^3\pi^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}}\,c^2dc$$

$$=\frac{16}{\alpha^6\pi}\left[I_1+I_2\right]$$

এখানে $I_1 = \int\limits_{c=0}^{\infty}\int\limits_{c'=0}^{\infty}\left(c+\frac{c'^2}{3c}\right)e^{-\frac{c'^2}{\alpha^2}}c'^2.e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}}c^2\,dc'\,dc$

এবং $I_2 = \int\limits_{c=0}^{\infty}\int\limits_{c'=0}^{\infty}\left(c'+\frac{c^2}{3c'}\right)e^{-\frac{c'^2}{\alpha^2}}c'^2\,e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}}c^2\,dc'\,dc$

দেখানো যায় যে I_1 ও I_2 সমাকলনদ্বয়ের উভয়েরই মান $\frac{\alpha^7}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ।

সুতরাং $$v = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,.\,\alpha \qquad 4.9.3$$

A অণুর প্রকৃত গতির গড় মান $\bar{c} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$ । u এর স্থানে এই মান ব্যবহার ক'রে 3.2.1 সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$\lambda = \frac{\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}}{\pi n\sigma^2\,.\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,.\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi n\sigma^2}$$

গড় অবাধপথের এই মান ইতিপূর্বেই 3.2.6 সূত্রে উদ্ধৃত হ'য়েছে।

গড় অবাধপথ নির্ণয়ের উপরিলিখিত পদ্ধতিকে গ্যাসের মিশ্রণের মধ্যে কোন একপ্রকার গ্যাস অণুর গড় অবাধপথ নির্ণয়ে ব্যবহার করা যায়। ধরা যাক কোন নির্দিষ্ট উষ্ণতায় গ্যাসের মধ্যে প্রতি একক আয়তনে $n_1, n_2, \ldots$ ইত্যাদি সংখ্যক মোট n প্রকারের অণু আছে। তাদের ভর $m_1, m_2 \ldots$, এবং ব্যাসার্ধ $r_1, r_2 \ldots$ ইত্যাদি। ভর বিভিন্ন হওয়ায় বিভিন্ন প্রকার অণুর বেগবণ্টনসূত্রে 'α' এর মান বিভিন্ন হবে। যে কোনও (i-তম) প্রকারের অণুর 'α' এর মান হবে $\alpha_i = \sqrt{\frac{2kT}{m_i}}$ । A অণুটি, ধরা যাক, i-তম প্রকারের।

যদি অন্য কোন প্রকারের (j-তম) কোন অণুর তুলনায় A অণুর আপেক্ষিক গতিবেগের গড় মান v_{ij} হয় তবে একক সময়ে ঐ প্রকারের অণুর সংগে A অণুর সংঘর্ষের সংখ্যা হবে $\pi n_j(r_i + r_j)^2 v_{ij}$ । $(r_i + r_j)$ এখানে সংঘর্ষের মুহূর্তে দুই অণুর কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব এবং সেই সংগে A অণুর কার্যকরী প্রভাবগোলকের ব্যাসার্ধ। একক সময়ে মোট সংঘর্ষের সংখ্যা

$\Sigma_j \pi n_j(r_i+r_j)^2 v_{ij}$ । A অণুর প্রকৃত গতি গড়ে $\frac{2}{\sqrt{\pi}} a_i$, সুতরাং A অণুর গড় অবাধপথ

$$\lambda_i = \frac{\frac{2a_i}{\sqrt{\pi}}}{\sum_i \pi\, n_j(r_i + r_j^2) v_{ij}} \qquad 4.9.4$$

প্রমাণ করা যায় যে $v_{ij} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{a_i^2 + a_j^2}$ । লক্ষণীয় যে দুই অণু $\frac{2a_i}{\sqrt{\pi}}$ ও $\frac{2a_j}{\sqrt{\pi}}$, অর্থাৎ নিজ নিজ গড় গতিবেগে পরস্পরের সংগে সমকোণে ধাবিত হ'লে যে আপেক্ষিক গতিবেগ জাত হয় 'v_{ij}' এর মান তার সমান। 'v_{ij}' এর গাণিতিক নির্ধারণ দীর্ঘ এবং এখানে পরিত্যক্ত হ'ল। 'v_{ij}' এর এই মান ব্যবহার করলে পাওয়া যায়

$$\lambda_i = \frac{a_i}{\sum_j \pi n_j (r_i + r_j)^2 \sqrt{a_i^2 + a_j^2}} \qquad 4.9.5$$

উল্লেখযোগ্য যে ৩·৫ অংশে বর্ণিত পরীক্ষায় বিভিন্ন গ্যাসের মধ্যে রূপার অণুর যে গড় অবাধপথের মান পাওয়া যায় 4.9.5 সূত্র থেকে তার প্রত্যাশিত মান পাওয়া যেতে পারে। যদি গ্যাস অণুর ঘনত্বসংখ্যা n, গ্যাস ও রূপার ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r ও r_s, ভর m ও m_s, ও উষ্ণতা T ও T_s হয় তবে 'a' এর মানও যথাক্রমে $a_j = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ ও $a_i = \sqrt{\frac{2kT_s}{m_s}}$ হবে। এবং 4.9.5 সূত্রে এই মানগুলি ব্যবহার ক'রে পাওয়া যাবে

$$\lambda_s = \frac{1}{\pi n (r + r_s)^2 \sqrt{1 + \frac{m_s \cdot T}{m \cdot T_s}}} \qquad 4.9.6$$

টেট (Tait) এর পদ্ধতিতে নির্ণীত গড় অবাধপথের মান

ম্যাক্সওয়েলের বেগবন্টন সূত্রের সাহায্যে গড় অবাধপথের যে মান নির্ণীত হ'ল, বস্তুতঃ তা গড় গতিবেগকে বিভিন্ন গতিবেগবিশিষ্ট অণুর সংঘর্ষের গড় হার দিয়ে ভাগ ক'রে পাওয়া গেছে। প্রকৃতপক্ষে অণুর গড় অবাধপথের মান গতিবেগের উপর নির্ভরশীল। টেটের পদ্ধতিতে প্রথমে ম্যাক্সওয়েলীয়

বেগবণ্টন প্রতিপালনকারী গ্যাসের মধ্যে c গতিবেগবিশিষ্ট কোন নির্দিষ্ট অণুর গড় অবাধপথ নির্ণয় করা হয়। পরে c এর বণ্টন ম্যাক্সওয়েলীয়, এরূপ কল্পনা করে নির্ণীত গড় অবাধপথের পুনরায় গড় নির্ণয় করা হয়।

টেটের সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় c গতিবেগবিশিষ্ট অণুর গড় অবাধ-পথের মান

$$\lambda_o = \frac{c^2}{a^2 \sqrt{\pi} n \sigma^2 \psi\left(\frac{c}{a}\right)} \qquad 4.9.7$$

এখানে $\psi\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{4}{5} \int_0^c \frac{c'^2}{a^5} (c'^2 + 3c^2)\, e^{-c'^2/a^2}\, dc'$

$$+ \frac{4}{5} \frac{c}{a^5} \int_c^\infty c'(c^2 + 3c'^2)\, e^{-c'^2/a^2}\, dc'$$

এখন λ_o এর গড় মান, বা টেটের পদ্ধতিতে নির্ণীত গড় অবাধপথ

$$\lambda_T = \frac{1}{n} \int \lambda_o dn_o$$

$$= \frac{4}{a^5 \pi n \sigma^2} \int_0^\infty \frac{c^4\, e^{-\frac{c^2}{a^2}}\, dc}{\psi\left(\frac{c}{a}\right)} \qquad \text{(4.4.3 সূত্রের সাহায্যে)}$$

সমাকলনটির টেট কর্তৃক নির্ণীত মান ব্যবহার ক'রে পাওয়া যায়

$$\lambda_T = \frac{0.677}{\pi n \sigma^2} \qquad 4.9.8$$

3.2.6 সূত্রের গড় অবাধপথের মান λ এর সংগে λ_T এর সম্পর্ক নিম্নরূপ :

$$\frac{\lambda_T}{\lambda} = 0{\cdot}957 \qquad 4.9.9$$

পঞ্চম অধ্যায়

পরিবহণ প্রক্রিয়া

৫.১ গ্যাসের সাম্যহীন অবস্থা

ম্যাক্সওয়েলীয় বেগবণ্টনসূত্র নির্ধারণের সময়ে গ্যাসের মধ্যে সাম্যাবস্থা প্রতিষ্ঠিত হয়েছে বলে ধরা হয়। এই অবস্থায় গ্যাসের মধ্যে অণুর ঘনত্ব-সংখ্যা, উষ্ণতা এবং অণুর কোন যৌথ গতিবেগ বিদ্যমান থাকলে তার মান সর্বত্র সমান হয়। সাম্যহীন অথচ স্থির অবস্থায় এই তিনটির যে কোনওটির মান এক বিন্দু থেকে অপর বিন্দুতে বিভিন্ন হ'তে পারে। অণুর ঘনত্বসংখ্যা বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন হ'লে যে বিন্দুতে ঘনত্বসংখ্যার মান অধিক সেখান থেকে যে বিন্দুতে এই রাশির মান অল্প সেই বিন্দু অভিমুখে, অর্থাৎ ঘনত্ব-সংখ্যার উন্নতির (gradient) বিপরীতদিকে গ্যাসের প্রবাহের সৃষ্টি হয়। এই প্রক্রিয়াকে 'ব্যাপন' (diffusion) বলা হয়। অনুরূপভাবে উষ্ণতার উন্নতির বিপরীতমুখে তাপের পরিবহণ (conduction) ঘটে। এবং যৌথ গতিবেগের মান বিভিন্ন স্তরে বিভিন্ন হ'লে এক স্তর থেকে অন্য স্তরে যৌথ গতিবেগের সংগে সংশ্লিষ্ট ভরবেগের প্রবাহ ঘটে। যার থেকে গ্যাসের সান্দ্রতার (viscosity) উৎপত্তি হয়। গ্যাসের অণুর বা তাদের গতীয় শক্তি বা ভরবেগের এরূপ প্রবাহগুলিকে "পরিবহণ প্রক্রিয়া" (Transport Phenomena) বলা হয়।

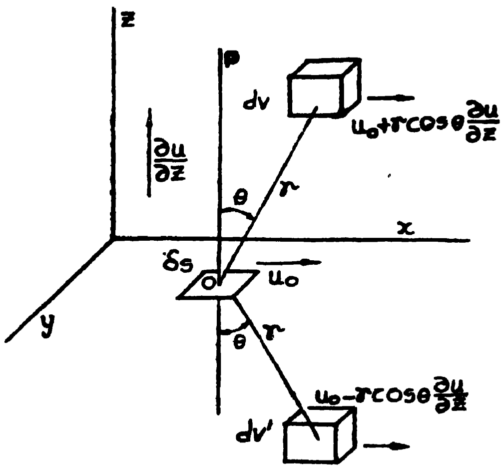
লক্ষণীয় যে পরিবহণ প্রক্রিয়াগুলি সর্বদাই অপ্রত্যাবর্তক (irreversible)। এই প্রক্রিয়াসমূহে শক্তি ক্রমশঃ অলভ্য হয়, বস্তুসমষ্টির অবিন্যস্ততা (entropy) বৃদ্ধি পায়। তাপগতিবিদ্যা অনুযায়ী এরূপ প্রক্রিয়া বিপরীতমুখী হ'তে পারে না।

এই অধ্যায়ে পূর্বোক্ত তিন প্রকার পরিবহণ প্রক্রিয়া, অর্থাৎ সান্দ্রতা, তাপ-পরিবহণ ও ব্যাপন পরিমাণগতভাবে আলোচিত হবে।

৫.২ গ্যাসের সান্দ্রতা

ধরা যাক কোন গ্যাসের মধ্যে অণুগুলির সাধারণ তাপজ গতিবেগ ছাড়াও এক যৌথ গতিবেগ বিদ্যমান এবং ঐ যৌথ গতিবেগের মান গতিবেগের উপর

লম্ব এমন কোনও দিকে সমহারে বর্ধিত হয়। গতিবেগের দিককে x-অক্ষ এবং গতিবেগের পরিবর্তনের দিককে z-অক্ষ ধরা যাক (চিত্র ৫.১)। $z=0$



চিত্র ৫.১

তলে যৌথ গতিবেগের মান u_0 এবং z-অক্ষ অভিমুখে যৌথ গতিবেগের উন্নতির হার $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ ধরা যাক। $z=0$ তলে অতিক্ষুদ্র তল δs কল্পনা করা যাক। δs এর উপর O বিন্দুকে কেন্দ্র ও δs তলের উপর লম্ব OP কে অক্ষ ধ'রে এক গোলীয় নির্দেশতন্ত্র নেওয়া হ'ল। ধরা যাক (r, θ, ϕ) নির্দেশাংকে dv এক অত্যন্ত ক্ষুদ্র আয়তন। যদি গ্যাসের মধ্যে অণুর ঘনত্ব-সংখ্যা সর্বত্র n হয় তবে পূর্বের ৩.৭ অংশের আলোচনা অনুযায়ী প্রতি একক সময়ে গড়ে

$$dN = ndv \cdot \frac{\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s \cos \theta}{4\pi r^2} e^{-r/\lambda} \qquad 5.2.1$$

সংখ্যক অণু dv আয়তনের মধ্যে সংঘর্ষের পর δs তলে পৌঁছাবে। 5.2.1 সূত্র 3.7.1 রাশিমালাকে ($\lambda_c = \lambda$, c এর উপর নির্ভরশীল নয় এরূপ ধ'রে নিয়ে) c এর সকল মানের জন্য সমাকলন ক'রে পাওয়া গেছে।

উল্লেখযোগ্য এই যে এখানে $\bar{c}$ কেবলমাত্র তাপজ গতিবেগেরই গড় মান। যৌথ গতিবেগ এই গতিবেগ থেকে স্বতন্ত্র এবং সাধারণভাবে তাপজ গতিবেগের তুলনায় অনেক অল্প মানের।

কল্পনা করা যাক যে dV আয়তনের মধ্যে যতগুলি অণুর সংঘর্ষ ঘটে তার প্রতিটিই ঐ আয়তনের z-নির্দেশাংকের উপযোগী যৌথ গতিবেগ অর্জন করে। এই যৌথ গতিবেগের পরিমাণ

$$u_0 + r\cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\because\ z = r\cos\theta)$$

সুতরাং প্রতিটি অণুর ভর যদি m হয় তবে dN সংখ্যক অণু মোট

$$m\left(u_0 + r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) dN$$

পরিমাণ যৌথ গতিবেগজাত ভরবেগ δs তলের মধ্য দিয়ে পরিচালিত করে। $(r, \pi-\theta, \phi)$ নির্দেশাংকে এখন dv এর সমান আয়তন dv' নেওয়া যাক। dv' আয়তন থেকেও প্রতি একক সময়ে dN সংখ্যক অণু ds তলে পৌঁছাবে এবং

$$m\left(u_0 - r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) d\,N$$

পরিমাণ ভরবেগ δs এর মধ্য দিয়ে পূর্বের বিপরীত দিকে বহন করবে। অর্থাৎ dV ও dV' থেকে আগত অণুসমূহ মোট

$$2m\ r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial z} \cdot dN$$

পরিমাণ ভরবেগ নিম্নাভিমুখে বহন করবে। δs এর উপরিভাগের সমগ্র আয়তনের জন্য শেষোক্ত রাশির যোগফল নির্ণয় করলে δs এর মধ্য দিয়ে একক সময়ে বাহিত মোট ভরবেগের পরিমাণ δP পাওয়া যাবে। অর্থাৎ

$$\delta P = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\phi=0}^{2\pi} 2m\,r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial z}\,dN$$

$$= 2m\,\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{n\bar{c}}{\lambda}\cdot\frac{\delta s}{4\pi}\int_{r=0}^{\infty} r\,e^{-\frac{r}{\lambda}}\,dr\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_{0=0}^{2\pi}d\phi$$

(5.2.1 সূত্রে dN এর মান এবং $dv = r^2\sin\theta\,dr\,d\phi$ ব্যবহার ক'রে)

$$= \frac{mnc\lambda}{3}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\delta s \qquad 5.2.2$$

গ্যাসের সান্দ্রতার সংজ্ঞা অনুযায়ী সান্দ্রতাংক যদি η হয় তবে δs তলের উপর প্রযুক্ত বল বা একক সময়ে δs তলের মধ্য দিয়ে পরিবাহিত ভরবেগের পরিমাণ $\eta \frac{\partial u}{\partial z} . \delta s$। এই রাশি δP এর সমান। সুতরাং

$$\eta = \frac{mn\bar{c}\lambda}{3} = \frac{\rho\bar{c}\lambda}{3} \qquad 5.2.3$$

এখানে $\rho = mn =$ গ্যাসের ঘনত্ব।

সান্দ্রতাংকের রাশিমালায় 'টেট্' এর শুদ্ধি

সান্দ্রতাংকের রাশিমালা নির্ণয়ে যে পদ্ধতি অনুসৃত হল তাতে প্রত্যেক অণুর একক সময়ে সংঘর্ষের সংখ্যা $\frac{\bar{c}}{\lambda}$ ব'লে ধরা হ'য়েছে। এই সংখ্যা বিভিন্ন গতিবেগের অণুর সংঘর্ষহারের গড় মান হ'লেও পূর্ববর্তী গণনায় এই সংখ্যার ব্যবহার কিছুটা ভ্রান্তির সৃষ্টি করে। কেননা অণুর গড় অবাধপথ অণুর গতিবেগের উপর নির্ভরশীল এবং δP এর মান নির্ণয়ার্থে λকে ধ্রুবরাশি হিসাবে দেখা অনুচিত। টেট্ এর পদ্ধতিতে গড় অবাধপথের গতিবেগনির্ভর মান λ_c(4.9.7 সূত্র) ব্যবহার করা হয় এবং সেই সঙ্গে সাম্যহীন অবস্থাতেও ম্যাক্সওয়েলীয় বেগবণ্টনসূত্র প্রয়োগের যৌক্তিকতা স্বীকার করা হয়। এই উপায়ে মোট পরিবাহিত ভরবেগের মান পাওয়া যায়

$$\delta P = 2m \frac{\partial u}{\partial z} . n \frac{\delta s}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$\int_{c=0}^{\infty} \int_{r=0}^{\infty} r e^{-\frac{r}{\lambda_c}} dr \frac{c}{\lambda_c} . \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} c^2 dc$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{mu\lambda}{\alpha^5} . \frac{\delta u}{\delta z} . \delta s \int_{c=0}^{\infty} \frac{4c^5 e^{-c^2/\alpha^2}}{\psi\left(\frac{c}{\alpha}\right)} dc \quad \left[\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n\sigma^2}\right]$$

টেট্ কর্তৃক নির্ণীত সমাকলনটির মান $\cdot 838\alpha^6$। এর থেকে সান্দ্রতাঙ্কের মান পাওয়া যায়

$$\eta_T = \frac{1 \cdot 051}{2} mn\bar{c}\lambda \qquad 5.2.4$$

অর্থাৎ টেটের পদ্ধতিতে নির্ণীত সান্দ্রতাঙ্কের মান পূর্বনির্ধারিত মান অপেক্ষা প্রায় 5% অধিক।

জীন্‌স্ (Jeans) এর গতিবেগের স্থিতিপ্রবণতাজনিত শুদ্ধি

সান্দ্রতাঙ্কের মূলসূত্র (5.2.3) নির্ধারণে কল্পনা করা হ'য়েছে যে কোনও একটি অণু dV আয়তনের মধ্যে সংঘর্ষে লিপ্ত হওয়ার পূর্বে গ্যাসের যে অংশ থেকেই এসে থাক, সংঘর্ষের পর ঐ অণু dV এর অবস্থানের উপযোগী যৌথ গতিবেগ লাভ করবে। জীন্‌স্ সমভরসম্পন্ন স্থিতিস্থাপক গোলকের সংঘর্ষের ক্ষেত্রে এই ধারণার অসত্যতা প্রদর্শন করেন। আসলে অণুর পূর্ববর্তী গতিবেগের প্রভাব সংঘর্ষের পরেও বিদ্যমান থাকে। জীন্‌স্ প্রমাণ করেন যে এর ফলে অণুর অবাধপথ কার্যতঃ কিছু পরিমাণে বৃদ্ধি পায়। টেটের গণনায় এইভাবে অণুর অবাধপথের আপাত-বৃদ্ধির প্রভাব সংযোজন করলে পাওয়া যায়ঃ

$$\eta = \frac{1 \cdot 382}{3} mn\bar{c}\lambda = 0 \cdot 461 \; mn\bar{c}\lambda \qquad 5.2.5$$

চ্যাপম্যান ও এন্‌স্‌কগের (Chapman, Enskog) গণনায় যৌথগতিবেগযুক্ত অবস্থায় গ্যাস-অণুর বেগের বণ্টননীতি ব্যবহার করা হয়। এই গণনায় পাওয়া যায়

$$\eta = 0 \cdot 499 \; mn\bar{c}\lambda \qquad 5.2.6$$

শেষোক্ত ফলকেই সান্দ্রতাঙ্কের সর্বাধিক শুদ্ধ তাত্ত্বিক মান হিসাবে ধরা যেতে পারে।

৫.৩ চাপ ও উষ্ণতার উপর গ্যাসের সান্দ্রতাঙ্কের নির্ভরশীলতা

সান্দ্রতাঙ্কের রাশিমালায় λ এর পরিবর্তে $\frac{1}{\sqrt{2}\pi n\sigma^2}$ লিখলে দেখা যায়

$$\eta \propto \frac{m\bar{c}}{\sigma^2} \qquad 5.3.1$$

'η' এর উপর চাপ ও উষ্ণতার প্রভাব এই সূত্র থেকে সহজেই বোঝা যায়।

(ক) চাপের প্রভাবঃ গ্যাসের উষ্ণতা অপরিবর্তিত থাকলে চাপ পরিবর্তিত হ'লেও $\bar{c}$ ও σ^2 এর কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং স্থির উষ্ণতায় সান্দ্রতাঙ্কের মান গ্যাসের চাপ বা ঘনত্বের উপর নির্ভর করে না।

সান্দ্রতাঙ্কের চাপনিরপেক্ষতা পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণিত হ'য়েছে। কয়েক টর থেকে বায়ুমণ্ডলের চাপের কয়েকগুণ পর্যন্ত চাপে সান্দ্রতাঙ্ক অপরিবর্তিত থাকতে দেখা গেছে। অতি অল্পচাপে গড় অবাধপথের সূত্র খাটে না কেননা λ চাপের ব্যস্তানুপাতী হওয়ায় ক্রমশঃ গড় অবাধপথের মান আধারের পরিসরের সংগে তুলনীয় হ'য়ে দাঁড়ায়। এই কারণে অতি অল্প চাপে সান্দ্রতাঙ্কের মান হ্রাস পায়। আবার অতি উচ্চ চাপে অবাধপথ এত হ্রস্ব হয় যে স্বল্প পাল্লার অন্তরণূক (intermolecular) বল গুরুত্ব অর্জন করে। ভরবেগ প্রকৃতপক্ষে λ অপেক্ষা কিঞ্চিৎ অধিক দূরত্বে বাহিত হয়। এক্ষেত্রেও সান্দ্রতাঙ্কের হিসাব ঠিকমত খাটে না। সুতরাং অতি অল্প ও অতি উচ্চ চাপে সান্দ্রতাঙ্কের পরিবর্তন অপ্রত্যাশিত নয়।

(খ) **উষ্ণতার প্রভাব ঃ** $\bar{c}$ এবং σ^2, উভয়ই নিরপেক্ষ উষ্ণতা T এর উপর নির্ভরশীল। 4.4.10 সূত্রানুযায়ী $\bar{c}=\sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}$। ৩.৩ অংশে আলোচিত হ'য়েছে যে σ^2 এর মান $\sigma^2_\infty\left(1+\frac{b}{T}\right)$ লেখা যেতে পারে।

5.3.1 সূত্র থেকে এখন সহজেই দেখা যায় ঃ

$$\eta\propto\frac{\sqrt{T}}{1+\frac{b}{T}} \qquad 5.3.2$$

কোন নির্দিষ্ট উষ্ণতা T_0 তে যদি সান্দ্রতাঙ্ক η_0 হয় তবে অন্য কোন উষ্ণতা T তে সান্দ্রতাঙ্কের মান

$$\eta=\eta_0\sqrt{\frac{T}{T_0}}\;\frac{1+\frac{b}{T_0}}{1+\frac{b}{T}} \qquad 5.3.3$$

5.3.3 সূত্রকে 'সাদারল্যাণ্ড সূত্র' বলা হয়। অনেক গ্যাসের ক্ষেত্রেই উষ্ণতার সংগে সান্দ্রতাঙ্কের পরিবর্তন এই সূত্রের সংগে সুন্দরভাবে মেলে।

৫.৪ গ্যাসের তাপ পরিবাহিতা

গ্যাসের মধ্যে উষ্ণতার বিভিন্নতা থাকলে তাপ পরিবহণের উদ্ভব হয়। ধরা যাক স্থির অবস্থায় গ্যাসের মধ্যে z অক্ষ অভিমুখে নিরপেক্ষ উষ্ণতা T সমহারে বৃদ্ধি পায়। এই বৃদ্ধির হার $\frac{\partial T}{\partial z}$।

৫.১ চিত্রের অনুরূপ এক চিত্র কল্পনা করা যাক যেখানে δs তলে উষ্ণতা T_0 এবং dv ও dv' আয়তন দুইটিতে উষ্ণতা যথাক্রমে $T_0+\frac{\partial T}{\partial z}\cdot r\cos\theta$ এবং $T_0-\frac{\partial T}{\partial z}\,r\cos\theta$। m ভরবিশিষ্ট প্রতিটি অণুর তাপধারণ ক্ষমতা (Thermal capacity) mc_v। পূর্বের মত যদি কল্পনা করা হয় যে dv ও dv' আয়তনের মধ্যে যে সকল অণুর সংঘর্ষ হয় সেগুলি ঐ আয়তনগুলির উষ্ণতা অনুযায়ী গতীয় শক্তি অর্জন করে, তবে সেগুলির দ্বারা বাহিত তাপশক্তির পরিমাণ হবে যথাক্রমে $mc_v\left(T_0+\frac{\partial T}{\partial z}\,r\cos\theta\right)$ এবং $mc_v\left(T_0-\frac{\partial T}{\partial z}\,r\cos\theta\right)$। dv আয়তন থেকে যে dN সংখ্যক অণু (5.2.1 সূত্র দ্রষ্টব্য) একক সময়ে δs তলে পৌঁছায় তারা মোট $mc_v\left(T_0+\frac{\partial T}{\partial z}\,r\cos\theta\right)dN$ পরিমাণ তাপশক্তি δs এর মধ্য দিয়ে পরিচালিত করে। অনুরূপভাবে dv' থেকে আগত সমসংখ্যক অণু ঐ সময়ে $mc_v\left(T_0-\frac{\partial T}{\partial z}\,r\cos\theta\right)dN$ পরিমাণ তাপশক্তি δs এর মধ্য দিয়ে বিপরীত-মুখে পরিচালিত করে। অর্থাৎ এইভাবে মোট বাহিত তাপের পরিমাণ

$$\delta E=\int 2m\,c_v\frac{\partial T}{\partial z}\,r\cos\theta\;dN$$

$$=\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\phi=0}^{2\pi}2m\,c_v\frac{\partial T}{\partial z}\,r\cos\theta\cdot\frac{n\bar{c}}{\lambda}\cdot\frac{\delta s\cos\theta}{4\pi r^2}\cdot e^{-\frac{r}{\lambda}}\cdot r^2\sin\theta\,d\theta\,dr\,d\phi$$

$$=2m\,c_v\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\cdot\frac{n\bar{c}}{\lambda}\cdot\frac{\delta s}{4\pi}\int_{r=0}^{\infty}r\,e^{-\frac{r}{\lambda}}\,dr\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_{\phi=0}^{2\pi}d\phi$$

$$=\frac{mn\bar{c}\lambda}{3}\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\cdot c_v\cdot\delta s$$

গ্যাসের তাপ পরিবাহিতা ধরা যাক K। সংজ্ঞা অনুযায়ী বর্তমান ক্ষেত্রে δs তলের মধ্য দিয়ে একক সময়ে পরিবাহিত তাপের পরিমাণ $\delta E=K\frac{\partial T}{\partial z}\cdot\delta s$। δE এর দুই মানকে সমান ধরে পাওয়া যায়

$$K=\frac{mn\bar{c}\lambda}{3}c_v=\eta\,c_v \qquad 5.4.1$$

5.4.1 সূত্রের প্রমাণে ধ'রে নেওয়া হ'য়েছে যে n এবং $\bar{c}$ গ্যাসের আয়তনের সর্বত্রই সমান থাকে। উষ্ণতা বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন হ'লে $\bar{c}$ অবশ্য সর্বত্র সমান থাকতে পারে না ; কেননা $\bar{c}$ $\sqrt{T}$ এর সমানুপাতী। গ্যাসের ঘনত্বসংখ্যা n ও সর্বত্র সমান থাকতে পারে না কেননা সেক্ষেত্রে চাপ আধারের সর্বত্র সমান থাকবে না এবং স্থির অবস্থা বিঘ্নিত হবে। তবে dN সংখ্যা $e^{-r/\lambda}$ এর সমানুপাতী হওয়ায় গড় অবাধপথের বহুগুণ দূরত্ব থেকে δs তলে আগত অণুর সংখ্যা উপেক্ষণীয় হবে। সুতরাং ঐরূপ দূরত্বে n ও $\bar{c}$ এর মান প্রকৃতপক্ষে বিভিন্ন হ'লেও এই বিভিন্নতার ফলে মোট পরিবাহিত তাপশক্তির গণনা অসত্য হয় না। প্রকৃতপক্ষে λ দূরত্বের মধ্যে উষ্ণতার পরিবর্তন $\left(\text{বা } \lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)$ T এর তুলনায় উপেক্ষণীয় হওয়া প্রয়োজন এবং পূর্ববর্তী 'δE' এর গণনায় এই সর্তটি স্বীকার ক'রে নেওয়া হ'য়েছে।

$K=\eta c_v$ সূত্রের সত্যতা সহজেই পরীক্ষা করা যায়। ৫.১ সারণীতে বিভিন্ন গ্যাসের K, η, c_v ও $K/\eta c_v$ এই রাশিগুলির পরীক্ষালব্ধ মান (0°C) সন্নিবিষ্ট হ'ল। তালিকাভুক্ত ϵ রাশিটির সম্পর্কে পরে আলোচনা করা হ'য়েছে।

গ্যাস	$K\times 10^5$ cal/sec. °C. cm.	$\eta\times 10^4$ gm/sec. cm.	c_v cal/gm. °C	$\frac{K}{\eta c_v}$	$\epsilon = \frac{9\gamma-5}{4}$
He	34·0	1·87	0·746	2·44	2·50
Ne	11·1	2·98	0·150	2·48	2·50
A	3·89	2·10	0·0745	2·49	2·50
H_2	40·2	0·84	2·41	1·99	1·92
N_2	57·3	1·66	0·175	1·97	1·91
O_2	58·5	1·95	0·157	1·91	1·89
CO_2	34·6	1·36	0·154	1·65	1·68
N_2O	36·1	1·37	0·155	1·70	1·68

৫.১ সারণী—বিভিন্ন গ্যাসের ক্ষেত্রে K, η, c_v, $K/\eta c_v$ ও ϵ রাশিসমূহের মান (উষ্ণতা = 0°C)।

বিভিন্ন গ্যাসের ক্ষেত্রে $\frac{`K'}{\eta c_v}$ এর মান লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে রাশিটির মান 1 থেকে নিশ্চিতরূপে বৃহত্তর। এই মান একপরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে সর্ববৃহৎ, প্রায় 2.50। পরমাণুর সংখ্যা যত বৃদ্ধি পায় এই মান ততই হ্রাস-প্রাপ্ত হয়। স্পষ্টতঃই পূর্বের গণনায় কোন গুরুত্বপূর্ণ ভ্রান্তির অনুপ্রবেশ ঘটেছে। আসলে প্রতিটি অণু $\bar{c}$ গতিবেগে গমন করে এবং গড় পরিমাণ তাপশক্তি $mc_v\left(T_0 \pm \frac{\partial T}{\partial z} r \cos\theta\right)$ বহন করে এই ধারণাই ভ্রান্তির সূত্রপাত করে। নির্দিষ্ট উষ্ণতায় অবস্থিত গ্যাসের মধ্যেও বেগের বন্টনহেতু বিভিন্ন বেগের অণু বর্তমান। অপেক্ষাকৃত দ্রুতগতি অণুর সংঘর্ষের হার অধিক ও গড় অবাধপথ দীর্ঘ। তদুপরি এই অণুগুলিই অধিক গতীয় শক্তি বহন করে। মন্দগতি অণুর ক্ষেত্রে বিপরীত অবস্থা লক্ষিত হয়। মোটের উপর অণুগুলির দ্বারা তাপশক্তি বহনের হার এর ফলে নির্ণীত পরিমাণ অপেক্ষা অধিক হয়।

বোল্‌ৎস্‌মান ও ম্যাক্সওয়েল এবং পরবর্তীকালে চ্যাপম্যান ও এনস্‌কগ অন্তরণুক বিকর্ষণী শক্তির বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার ক'রে এই সমস্যা সমাধানের চেষ্টা করেন। চ্যাপম্যান ও এনস্‌কগ একপরমাণুক, অর্থাৎ কেবলমাত্র রৈখিক গতিবিশিষ্ট অণুর ক্ষেত্রে $\frac{1}{r^n}$ (r = অণুর কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব) এর সমানুপাতী বিকর্ষণী বলের কল্পনা ক'রে $\frac{K}{\eta c_v}$ ($=\epsilon$, ধরা যাক) এর মান নির্ণয় করেন। $n=5$ এর ক্ষেত্রে $\epsilon=\frac{5}{2}$ পাওয়া যায়। n এর অন্য মানের জন্য ϵ বিভিন্ন হ'লেও $\frac{5}{2}$ এর নিকটবর্তী হয়, সুতরাং কেবলমাত্র রৈখিক গতির জন্য ϵ এর মান অর্থাৎ ϵ_t কে 2.500 হিসাবে ধরা হবে। রৈখিক ব্যতীত অন্য প্রকার গতির ক্ষেত্রে (যথা ঘূর্ণন ও কম্পন) ϵ এর মান $\epsilon_r=1$ ধরে নেওয়া যায় কেননা সাধারণভাবে ঐরূপ গতিজনিত তাপশক্তি ও অণুর তাপ-পরিবহণ দক্ষতার মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।*

গ্যাস-অণুর রৈখিক ব্যতীত অন্যপ্রকার গতিজনিত স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা β ধরা যাক। শক্তির সমবিভাজন নীতি থেকে বলা যায় অণুর রৈখিক গতিজনিত

---

* কম্পনের দিক ও তাপপ্রবাহের দিক এক হ'লে এই উক্তি যথার্থ থাকে না। এরূপ কম্পনের দ্বারা তাপ পরিবাহিত হ'তে পারে এবং এক্ষেত্রে ϵ এর মান 1 ও 2·5 এর মধ্যবর্তী হওয়া উচিত। গণনার সারল্যের জন্যই ϵ এর মান এক্ষেত্রেও 1 রাখা হল।

শক্তি $\frac{3}{2}kT$ এবং অন্যপ্রকার গতিজনিত শক্তি $\frac{\beta}{2}kT$। প্রথম প্রকার শক্তির জন্য আপেক্ষিক তাপের মান

$$c_t = \frac{1}{Jm}\frac{d}{dT}(\tfrac{3}{2}kT) \qquad [\, J = \text{তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক} \,]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{k}{Jm}$$

এবং দ্বিতীয় প্রকার শক্তির জন্য

$$c_r = \frac{1}{Jm}\frac{d}{dT}\left(\frac{\beta}{2}kT\right) = \frac{\beta}{2}\frac{k}{Jm}$$

∴ মোট আপেক্ষিক তাপ $c_v = c_t + c_r = \frac{3+\beta}{2}\frac{k}{Jm}$ 5.4.2

এবং মোট তাপ পরিবাহিতার মান

$$K = \eta(\epsilon_t c_t + \epsilon_r c_r) \qquad 5.4.3$$

ϵ_t, ϵ_r, c_t ও c_r এর পূর্বলব্ধ মান ব্যবহার ক'রে পাওয়া যায়

$$\epsilon = \frac{K}{\eta c_v} = \frac{\epsilon_t c_t + \epsilon_r c_r}{c_t + c_r}$$

$$= \frac{15+2\beta}{6+2\beta} \qquad 5.4.4$$

ϵ কে গ্যাসের দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত 'γ' এর মাধ্যমেও লেখা যায়। স্থির চাপে আপেক্ষিক তাপের মান

$$c_p = c_v + \frac{R}{JM} \qquad (\, M = \text{আণবিক ভর} \,)$$

$$= c_v + \frac{k}{Jm}$$

$$= \frac{5+\beta}{2}\cdot\frac{k}{Jm} \qquad 5.4.5$$

5.4.2 ও 5.4.5 সূত্রদ্বয় থেকে

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5+\beta}{3+\beta} \qquad 5.4.6$$

5.4.4 ও 5.4.6 সূত্রদ্বয় থেকে β কে অপনয়ন করলে পাওয়া যায়:

$$\epsilon = \tfrac{1}{4}(9\gamma - 5) \qquad 5.4.7$$

৫.২ সারণীতে বিভিন্ন গ্যাসের ক্ষেত্রে 5.4.7 সূত্র থেকে লব্ধ ϵ এর মান লিপিবদ্ধ হ'য়েছে। $\frac{K}{\eta c_v}$ এর মানের সংগে এই রাশির তুলনা করলে উভয়ের সঙ্গতি সুস্পষ্ট হয়। অতি অল্প সংখ্যক ক্ষেত্রেই দুই রাশির মধ্যে অসঙ্গতি দেখা যায়। এবং সেই অসঙ্গতির কারণ কম্পনশক্তি-পরিবহণের যথার্থ হিসাবের অভাব বা কোন কোন ক্ষেত্রে অতি অল্প উষ্ণতায় পরিবহণ-প্রক্রিয়ার প্রকৃতির পরিবর্তন।

৫.৫ চাপ ও উষ্ণতার সংগে তাপপরিবাহিতার সম্পর্ক

তাপপরিবাহিতা বা K 'ηc_v' এর সমানুপাতী কেননা ϵ কে স্থির রাশি হিসাবে ধরা যায়। চাপ বা উষ্ণতার সংগে আপেক্ষিক তাপ বিশেষ পরিবর্তিত হয় না। ফলে তাপপরিবাহিতা গ্যাসের সান্দ্রতার মতই আচরণ করে।

চাপের পরিবর্তনের সংগে তাপপরিবাহিতার সাধারণভাবে বিশেষ পরিবর্তন হয় না। অতি অল্প চাপে যখন গ্যাস-অণুর গড় অবাধপথ আধারের পরিসরের সংগে তুলনীয় হয় তখন তাপের পরিবহণ ভিন্ন উপায়ে ঘটে এবং পরিবাহিতা হ্রাস পায়। অতি উচ্চচাপে পরিচলনের (convection) প্রভাবে তাপপরিবাহিতার সূক্ষ্ম পরিমাপ করা যায় না। তবে আশা করা যায় যে অতি উচ্চচাপে সান্দ্রতার মত পরিবাহিতাও স্থির থাকে না।

উষ্ণতার সংগে তাপপরিবাহিতার পরিবর্তনও মোটামুটিভাবে সান্দ্রতার মতই হয়। অর্থাৎ তাপপরিবাহিতা নিরপেক্ষ উষ্ণতা T এর সংগে $\sqrt{T}$ অপেক্ষা অধিক হারে ওঠানামা করে। তবে বিভিন্ন উষ্ণতায় তাপপরিবাহিতার পরিমাপ দুরূহ এবং স্বাভাবিক ভাবেই খুব সূক্ষ্ম নয়। সে হিসাবে আণবিক তত্ত্ব থেকে তাপপরিবাহিতার চাপ ও উষ্ণতার উপর যেরূপ নির্ভরশীলতা প্রত্যাশিত হয়, পরীক্ষালব্ধ ফল তার সংগে সঙ্গতিপূর্ণ বলা যায়।

৫.৬ গ্যাসের ব্যাপন

পূর্বে গ্যাসের আয়তনের মধ্যে নির্দিষ্ট দিকে দূরত্বের সংগে অণুর যৌথ গতিবেগ ও উষ্ণতার সমহারে পরিবর্তন কল্পনা করা হ'য়েছে। অণুর ঘনত্ব-সংখ্যা যদি অনুরূপভাবে পরিবর্তিত হয় তবে গ্যাসের ব্যাপন ঘটে অর্থাৎ ঘনত্ব-সংখ্যার উন্নতির বিপরীতমুখে গ্যাস যৌথভাবে প্রবাহিত হয়। পরবর্তী আলোচনায় কল্পনা করা হবে যে ব্যাপনসত্ত্বেও স্থির অবস্থা বজায় থাকে অর্থাৎ ঘনত্বসংখ্যা ও তার উন্নতি সর্বত্র অপরিবর্তিত থাকে।

ধরা যাক z-অক্ষ অভিমুখে কোন গ্যাসের ঘনত্বসংখ্যা n সমহারে বর্ধিত হয়। $z=0$ তলে n এর মান n_0 এবং z অক্ষ বরাবর n এর বৃদ্ধির হার $\frac{\partial n}{\partial z}$। dv ও dv' আয়তনের মধ্যে (৫.১ চিত্র) n এর মান যথাক্রমে $\left(n_0+\frac{\partial n}{\partial z}\cdot r\cos\theta\right)$ ও $\left(n_o-\frac{\partial n}{\partial z}\cdot r\cos\theta\right)$। 5.2.1 সূত্রে n এর এই মান ব্যবহার করে পাওয়া যায় যে প্রতি একক সময়ে

$$\left(n_o+\frac{\partial n}{\partial z}r\cos\theta\right)\ dv.\ \frac{\bar{c}}{\lambda}\ .\ \frac{\delta s\cos\theta}{4\pi r^2}\ e^{-r/\lambda}$$

সংখ্যক অণু dv আয়তনে সংঘর্ষের পর এবং

$$\left(n_o-\frac{\partial n}{\partial z}r\cos\theta\right)\ dv.\ \frac{\bar{c}}{\lambda}\cdot\frac{\delta s\cos\theta}{4\pi r^2}.\ e^{-r/\lambda}$$

সংখ্যক অণু dv এর সমান আয়তন dv' এ সংঘর্ষের পর δs তলে পৌঁছাবে। অতএব একক সময়ে dv ও dv' আয়তন দুইটি থেকে আগত ও δs তলের মধ্য দিয়ে নিম্নাভিমুখে (অর্থাৎ n এর উন্নতির বিপরীত মুখে) গমনকারী অণুর মোট সংখ্যা

$$2r\cos\theta\cdot\frac{\partial n}{\partial z}\cdot dv\cdot\frac{c}{\lambda}\cdot\frac{\delta s\cos\theta}{4\pi r^2}\ e^{-r/\lambda}$$

অতএব একক সময়ে δs তলের মধ্য দিয়ে নিম্নগামী অণুর মোট সংখ্যা

$$\delta N_D=\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{\pi}2r\cos\theta\ .\frac{\partial n}{\partial z}.\frac{\bar{c}}{\lambda}.\frac{\delta s\cos\theta}{4\pi r^2}.e^{-\frac{r}{\lambda}}\ r^2\sin\theta\,d\theta\,dr\,d\phi$$

$$=\frac{1}{3}\bar{c}\lambda\frac{\partial n}{\partial z}.\ \delta s \qquad 5.6.1$$

গ্যাসের ব্যাপনাংক D এর সংজ্ঞানুযায়ী

$$\delta N_D=D\ .\frac{\partial n}{\partial z}.\ \delta s \qquad 5.6.2$$

δN_D এর এই দুই রাশিমালা সমান, সুতরাং

$$D=\frac{1}{3}\bar{c}\lambda=\frac{\eta}{\rho}\ \text{(5.2.3 অনুযায়ী)} \qquad 5.6.3$$

ব্যাপন সংক্রান্ত পরীক্ষায় সাধারণতঃ আধারের মধ্যে দুই প্রকার গ্যাস একত্র থাকে এবং চাপ ও উষ্ণতা সর্বত্র সমান থাকে। তার জন্য উভয় প্রকার গ্যাসের ঘনত্ব-সংখ্যার যোগফল সমান থাকা প্রয়োজন সুতরাং উভয় ঘনত্বসংখ্যার উন্নতি সম-হারবিশিষ্ট কিন্তু বিপরীতমুখী হবে। ধরা যাক্ দুই প্রকার গ্যাস A ও B এর ঘনত্বসংখ্যা n_a ও n_b, গড় অবাধপথ λ_a ও λ_b এবং গতিবেগের গড় $\bar{c}_a$ ও $\bar{c}_b$। যেহেতু $n_a+n_b=$ স্থির রাশি,

$$\frac{\partial n_a}{\partial z}=-\frac{\partial n_b}{\partial z}=\frac{\partial n}{\partial z}, \text{ ধরা যাক ।}$$

z-অক্ষের সঙ্গে সমকোণে অবস্থিত δs তলের মধ্য দিয়ে একক সময়ে নিম্নগামী A ও B অণুর সংখ্যা (5.6.1 সূত্রানুযায়ী)

$$\delta N_{Da}=\frac{1}{3}\bar{c}_a\lambda_a\frac{\partial n_a}{\partial z}\,.\,\delta s$$

এবং $$\delta N_{Db}=\frac{1}{3}\bar{c}_b\lambda_b\frac{\partial n_b}{\partial z}\,.\,\delta s$$

A ও B অণুর নিম্নগমনের মোট হার

$$\delta N_{Da}+\delta N_{Db}=\frac{1}{3}\frac{\partial n}{\partial z}(\bar{c}_a\lambda_a-\bar{c}_b\lambda_b)\delta s \qquad (5.6.4)$$

$(\bar{c}_a\lambda_a-\bar{c}_b\lambda_b)$ যদি শূন্য না হয়, তবে তার অর্থ এই যে ক্রমশঃ δs তলের মধ্য দিয়ে গ্যাস একই দিকে প্রবাহিত হতে থাকবে। এই অবস্থায় আধারের মধ্যে চাপের সমতা বজায় থাকতে পারে না। তাপের সমতা রক্ষার জন্য δs তলের মধ্য দিয়ে উভয় প্রকার গ্যাসেরই এক যৌথ গতিবেগ সৃষ্টি হবে। ব্যাপনের ফলে A ও B অণুর মোট প্রবাহ যেদিকে হয় এই যৌথ গতিবেগ তার বিপরীত দিকে হবে যাতে প্রবাহিত অণুর মোট সংখ্যা শূন্য হয়। ধরা যাক এই গতিবেগের মান v। শুধু এই গতিবেগের জন্য একক সময়ে যথাক্রমে $v\delta s\,.\,n_a$ ও $v\delta s\,.\,n_b$ সংখ্যক A ও B অণু δs তলের মধ্যে দিয়ে গমন করবে।

5.6.4 সূত্র ব্যবহার ক'রে :

$$v\delta s(n_a+n_b)+\frac{1}{3}\frac{\partial n}{\partial z}(\bar{c}_a\lambda_a-\bar{c}_b\lambda_b)\delta s=0$$

অথবা $$v=-\frac{\frac{\partial n}{\partial z}}{3(n_a+n_b)}(\bar{c}_a\lambda_a-\bar{c}_b\lambda_b)=0 \qquad 5.6.5$$

A ও B অণুর মোট প্রবাহের হার এখন সহজেই পাওয়া যায়। A অণুর প্রবাহহার $= v\delta s\ .\ n_a + \delta N_{Da}$

$$= \frac{n_b\bar{c}_a\lambda_a + n_a\bar{c}_b\lambda_b}{3(n_a+n_b)} \cdot \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \delta s$$

B অণুও সমহারেই প্রবাহিত হয়। এইভাবে একপ্রকার গ্যাসের মধ্যে অন্য এক অসমপ্রকারের গ্যাসের ব্যাপনকে 'অন্তর্ব্যাপন' (interdiffusion) বলা হয়।

যদি $D_{ab} = B$ গ্যাসের মধ্যে A গ্যাসের 'অন্তর্ব্যাপনাংক' হয় তবে এই হার অন্তর্ব্যাপনাংকের সংজ্ঞানুযায়ী

$$D_{ab}\frac{\partial n}{\partial z} \cdot \delta s$$

এর সমান। সুতরাং

$$D_{ab} = \frac{n_b\bar{c}_a\lambda_a + n_a\bar{c}_b\lambda_b}{3(n_a+n_b)} = D_{ba} \qquad 5.6.6$$

5.6.6 সূত্র 'মেয়ারের (Meyer) সূত্র' নামে পরিচিত। সহজেই বোঝা যায় যে অন্তর্ব্যাপনাংক প্রকৃতপক্ষে $\frac{n_a}{n_b}$ অর্থাৎ গ্যাসের মিশ্রণের মধ্যে দুই প্রকার অণুর সংখ্যার অনুপাতের উপর নির্ভরশীল। মিশ্রণের গঠনের দুই চরম অবস্থায় অর্থাৎ n_a ও n_b যদি একে অপরের তুলনায় উপেক্ষণীয় হয় তবে মেয়ারের সূত্র থেকে ঃ

$$D_{ab}(n_a << n_b) = \tfrac{1}{3}\bar{c}_a\lambda_a$$
$$D_{ba}(n_b << n_a) = \tfrac{1}{3}\bar{c}_b\lambda_b$$

λ_a ও λ_b এর মান 4.9.6 সূত্র থেকে পাওয়া যেতে পারে।

যখন $n_a << n_b$, মোট ঘনত্বসংখ্যা n

$$\lambda_a = \frac{1}{\pi\, n(r_a + r_b)^2\sqrt{1 + \frac{m_a}{m_b}}}$$

অতএব, $D_{ab}(n_a << n_b) = \dfrac{\bar{c}_a}{3\pi\, n(r_a + r_b)^2\sqrt{1 + \frac{m_a}{m_b}}}$

অনুরূপভাবে $D_{ba}\,(n_b << n_a) = \dfrac{\bar{c}_b}{3\pi\, n(r_a + r_b)^2\sqrt{1 + \frac{m_b}{m_a}}}$

এবং উভয়ের অনুপাত $e = \dfrac{D_{ab}(n_a << n_b)}{D_{ba}(n_b << n_a)} = \dfrac{\bar{c}_a}{\bar{c}_b} \cdot \sqrt{\dfrac{m_a}{m_b}} = \dfrac{m_b}{m_a}$ 5.6.7

A ও B গ্যাস বিভিন্ন হ'লেও যদি তাদের আণবিক ভর ও আকার সমান হয় তবে $\bar{c}_a=\bar{c}_b$ এবং $\lambda_a=\lambda_b$ হয়। CO_2 ও N_2O গ্যাস দুইটিকে উদাহরণস্বরূপ নেওয়া যায়। এরূপ অবস্থায় ব্যাপনাঙ্ককে 'সমব্যাপনাংক' (coeff of. self-Diffusion) বলা হয়। 5.6.6 সূত্র থেকে $\bar{c}_a=\bar{c}_b=\bar{c}$ ও $\lambda_a=\lambda_b=\lambda$ লিখলে সহজেই পাওয়া যায়

$$D^{S}_{ab}=\tfrac{1}{3}\bar{c}\,\lambda=D^{S}_{ba} \qquad 5.6.8$$

ব্যাপনাংকের এই হিসাবের মধ্যেও কিছুটা সূক্ষ্মতার অভাব আছে। 5.6.1 সূত্রের নির্ধারণকালে প্রকৃতপক্ষে গতিবেগের উপর নির্ভরশীল গড় অবাধপথের মান λ_c ব্যবহার ক'রে ও বিভিন্ন গতিবেগসীমার মধ্যে অবস্থিত অণুর প্রবাহ-সংখ্যা পৃথকভাবে নির্ণয় করে তার যোগফল বার করাই সংগত ছিল। অন্তর্ব্যাপনের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতির ব্যবহার অতি কঠিন গাণিতিক সমস্যার উদ্ভব করে কেননা λ_c এর মান $\frac{n_a}{n_b}$ অনুপাতের উপর নির্ভরশীল হয়। এই অনুপাতের সংগে λ_cও z–নির্দেশাংকের সংগে পরিবর্তিত হয়। সমব্যাপনের ক্ষেত্রে λ_c '$\frac{n_a}{n_b}$' এর উপর নির্ভরশীল নয়। সমব্যাপনাংকের মান পূর্বোক্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় করলে পাওয়া যায় :

$$D^{S}_{ab}=\frac{1\cdot051}{3}\bar{c}\,\lambda=\frac{\eta_T}{\rho} \quad (\text{ 5.2.4 দ্রষ্টব্য }) \qquad 5.6.9$$

জীন্‌স্ এর গতিবেগের স্থিতিপ্রবণতাজনিত শুদ্ধি প্রয়োগ করে সমব্যাপনাংকের মান পাওয়া যায়

$$D^{S}_{ab}=1.34\frac{\eta}{\rho} \qquad 5.6.10$$

অন্তর্ব্যাপনাংকের ক্ষেত্রে এই শুদ্ধির প্রয়োগও অপেক্ষাকৃত জটিল। এই শুদ্ধি প্রয়োগ ক'রে দেখা যায় যে $D_{ab}(n_a<<n_b)$ ও $D_{ba}(n_b<<n_a)$ এই দুই অন্তর্ব্যাপনাংকের মান কখনই 3 : 4 অনুপাতের অধিক অসম হয় না (অর্থাৎ $\frac{4}{3}\geqslant e\geqslant\frac{3}{4}$)। মেয়ারের সূত্র অনুযায়ী এই অসমতা অধিকতর হ'তে পারে।

ম্যাক্সওয়েল ও বোল্‌ৎস্‌মানের গণনায় r দূরত্বে অবস্থিত দুই অণুর মধ্যে বিকর্ষণী শক্তি $\frac{1}{r^5}$ এর সমানুপাতী ধরা হয়। এই পদ্ধতিতে সমব্যাপনাংকের মান পাওয়া যায়

$$D^{S}_{ab}=1\cdot504\frac{\eta}{\rho} \qquad 5.6.11$$

চ্যাপম্যান ও এন্‌স্‌কগ অণুগুলিকে স্থিতিস্থাপক কঠিন গোলক হিসাবে কল্পনা ক'রে এই ফল লাভ করেন ঃ

$$\overset{s}{D}_{ab} = 1{\cdot}200\,\frac{\eta}{\rho} \qquad 5.6.12$$

$$\text{ও } e = \frac{1 + \dfrac{m^2_b}{12\,m^2_b + 16\,m_a m_b + 30\,m^2_a}}{1 + \dfrac{m^2_a}{12\,m_a^2 + 16\,m_a m_b + 30\,m^2_b}} \qquad 5.6.13$$

পরীক্ষালব্ধ ফলের সংগে উল্লিখিত বিভিন্ন সূত্রের সঙ্গতি ও অসঙ্গতি পরবর্তী অংশে আলোচিত হ'ল।

৫.৭ ব্যাপন সম্বন্ধীয় পরীক্ষালব্ধ ফল এবং চাপ ও উষ্ণতার উপর ব্যাপনাংকের নির্ভরশীলতা

5.6.3 সূত্রে গ্যাসের যে ব্যাপনাংকের উল্লেখ আছে তার মান পরীক্ষার দ্বারা নির্ণয় করা যায় না। বরং যে সকল গ্যাস-যুগ্মের অণুর ভর ও ব্যাসার্ধ সমান, তাদের ক্ষেত্রে সমব্যাপনাংকের মান পরীক্ষার দ্বারা জানা যায় এবং ঐ মান থেকে ব্যাপনাংক D এর মান হিসাব করা যায়। বিভিন্ন গ্যাসের $\frac{D\rho}{\eta}$ এর মান 1.2 ও 1.5 এর মধ্যে থাকতে দেখা যায়, সুতরাং ম্যাক্সওয়েল ও চ্যাপম্যান-এন্‌স্‌কগের গণনা মোটামুটি নির্ভুল বলা যেতে পারে।

গ্যাসের মিশ্রণ-অনুপাতের সংগে অন্তর্ব্যাপনাংকের পরিবর্তনও পরীক্ষিত হ'য়েছে। অন্তর্ব্যাপনাংকের মান এই অনুপাতের সংগে পরিবর্তিত হ'লেও এই পরিবর্তন সচরাচর কয়েক শতাংশের বেশী হয় না। $H_2(A)$ ও $CO_2(B)$ গ্যাসযুগ্মের ক্ষেত্রে $\frac{n_a}{n_b}$. এর মান যখন 3, 1 ও $\frac{1}{3}$, তখন 'D_{ab}' এর মান যথাক্রমে 0·594, 0·605 ও 0·633 (একক $=$ cm^2/sec)। চ্যাপম্যানের গণনা অনুযায়ী রাশিগুলির প্রত্যাশিত মান যথাক্রমে 0·589, 0·617 এবং 0·628। উল্লিখিত রাশিগুলি নিঃসন্দেহে চ্যাপম্যানের গণনার সমর্থন করে।

ব্যাপনাংক বা D এর সংগে $\bar{c}\lambda$ সমানুপাতী। এর মধ্যে $c \propto \sqrt{T}$ এবং নির্দিষ্ট চাপে $\lambda \propto \dfrac{T}{1+\dfrac{b}{T}}$। আশা করা যায় যে '$D$' $T^{\frac{3}{2}} \Big/ \left(1+\dfrac{b}{T}\right)$ এর সমানুপাতী হবে। নিরপেক্ষ উষ্ণতা T এর সংগে ব্যাপনাংকের পরিবর্তন

$T^{\frac{3}{2}}$ অপেক্ষা দ্রুত হ'তে দেখা যায়। ব্যাপনাংকের মান যতটা সূক্ষ্মভাবে নির্ণয় করা যায় তাতে উষ্ণতার সংগে D এর পরিবর্তন আশানুরূপ ব'লেই ধরে নেওয়া যায়।

নির্দিষ্ট উষ্ণতায় $\bar{c}$ স্থির থাকে এবং λ চাপ 'p' এর ব্যস্তানুপাতী হয়। ব্যাপনাংকও সেই কারণে 'p' এর ব্যস্তানুপাতী হওয়া উচিত এবং পরীক্ষাদ্বারাও এরূপ পরিবর্তনই লক্ষিত হয়।

ষষ্ঠ অধ্যায়

তনুভূত গ্যাসের আচরণ বৈশিষ্ট্য

৬.১ অতি অল্প চাপে বিভিন্ন প্রক্রিয়ার প্রকৃতিস্বাতন্ত্র্য

গ্যাস অণুর গড় অবাধপথ যখন অতি অল্প চাপে আধারের পরিমাপের সংগে তুলনীয় হ'য়ে পড়ে, তখন সাধারণ চাপে গ্যাসের প্রকৃতি সম্পর্কিত গণনা প্রয়োগযোগ্য থাকে না। পরিবহণ-প্রক্রিয়ার আলোচনায় পূর্বেই এই অবস্থার পরিচয় পাওয়া গেছে। উদাহরণস্বরূপ, গ্যাসের সান্দ্রতাংক সাধারণ চাপে চাপনিরপেক্ষ থাকলেও অতি অল্প চাপে সান্দ্রতা হ্রাস পায়, এরূপ দেখা গেছে। প্রকৃতপক্ষে বিভিন্ন পরিবহণ প্রক্রিয়া ও সংশ্লিষ্ট ঘটনাবলীর প্রত্যেকটিকেই এরূপ চাপে নূতন দৃষ্টিভঙ্গী থেকে পরীক্ষা করা প্রয়োজন হয়। অণুর সংগে আধারগাত্রের সংঘর্ষই অতি অল্প চাপে প্রাধান্য লাভ করে সুতরাং আধারের জ্যামিতিক বিন্যাস পরিলক্ষিত ঘটনার ব্যাখ্যায় গুরুত্বপূর্ণ হয়। এছাড়া কঠিন আধারগাত্রের সংগে অণুর সংঘর্ষকালে ভরবেগ ও শক্তির আদান-প্রদান কি উপায়ে ঘটে সে সম্বন্ধেও প্রশ্নের অবকাশ দেখা দেয়।

বর্তমান অধ্যায়ে অতি অল্প চাপে পরিলক্ষিত কয়েকটি ঘটনার আণবিক তত্ত্বগত ব্যাখ্যা আলোচিত হবে।

৬.২ কৈশিকের মধ্যে গ্যাসের প্রবাহ

সাধারণ চাপে কৈশিকের মধ্যে গ্যাসের প্রবাহ 'পোয়াস্যোই'র (Poiseuille) সূত্র প্রতিপালন করে। a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট l দৈর্ঘ্যের কৈশিকের প্রান্তদ্বয়ের মধ্যে চাপের ব্যবধান P হ'লে η সান্দ্রতাঙ্ক বিশিষ্ট গ্যাসের প্রবাহের হার হয়

$$V=\frac{\pi P a^4}{8 l \eta} \qquad 6.2.1$$

এই 'V' কৈশিকের মধ্যে গড় চাপে একক সময়ে প্রবাহিত গ্যাসের আয়তন। সাধারণ চাপে 6.2.1 সূত্রে সান্দ্রতাঙ্কের মান চাপের সংগে পরিবর্তিত হয় না। কিন্তু অতি অল্পচাপে অণুর গড় অবাধপথ যখন কৈশিক-ব্যাসার্ধের সংগে তুলনীয় হয় তখন এই সূত্র থেকে নির্ণীত সান্দ্রতাঙ্কের মান ক্রমশঃ কমতে থাকে।

এই অসঙ্গতিকে নিম্নবর্ণিত উপায়ে ব্যাখ্যা করা যায়। পোয়াসোঁইর সূত্রের প্রতিপাদনে কল্পনা করা হয় যে কৈশিকের গাত্রসংলগ্ন প্রবাহীর কোন গতিবেগ নেই। কিন্তু অতি অল্প চাপে গ্যাসের ক্ষেত্রে কৈশিকের গাত্রে গতিবেগের মান শূন্য ধরা যায় না। ধরা যাক এই গতিবেগের মান v_0। কৈশিকের মোট $2\pi al$ ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট গাত্রে প্রবাহীর ঘর্ষণজনিত রোধ $2\pi alv_0\epsilon$ পরিমাণ বলের সৃষ্টি করে। 'ϵ'কে ঘর্ষণজণিত রোধের গুণাংক হিসাবে ধরা যেতে পারে।

কৈশিকের গাত্রসংলগ্ন অতি সূক্ষ্ম প্রবাহীর স্তরের উপর সান্দ্রতাজনিত বল $-2\pi al\eta \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=a}$ (v = কৈশিকের অক্ষ থেকে r দূরত্বে প্রবাহীর গতিবেগ)। স্তরের দুই প্রান্তে চাপের বিভিন্নতা হেতু প্রযুক্ত বলকে উপেক্ষা করা যায়। স্থির অবস্থায় সান্দ্রতাজনিত বল ও ঘর্ষণজাত রোধের যোগফল শূন্য হয়, সুতরাং

$$-\frac{\eta}{\epsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=a} \qquad 6.2.2$$

স্থির অবস্থায় কৈশিকের মধ্যে প্রবাহীর ত্বরণ হয় না। কৈশিকের সংগে সমাক্ষ, r ব্যাসার্ধ ও l দৈর্ঘ্যের এক বেলনাকৃতি আয়তন কল্পনা করা যাক। এই আয়তনের মধ্যস্থ গ্যাসের উপর চাপজনিত বল $P \cdot \pi r^2$ এবং সান্দ্রতাজনিত বল $2\pi rl\eta \frac{\partial v}{\partial r}$। ত্বরণহীণ অবস্থায় মোট বল শূন্য, অর্থাৎ $P \cdot \pi r^2 = -2\pi rl\eta \frac{\partial v}{\partial r}$। কৈশিকের গাত্রে $(r=a)$ v এর মান v_0 ধরে সমাকলনের সাহায্যে পাওয়া যায়

$$v - v_0 = \frac{P}{4l\eta}(a^2 - r^2) \qquad 6.2.3$$

গ্যাসের প্রবাহের মোট হার

$$V = \int_0^a 2\pi r \cdot v \cdot dr$$

$$= \pi a^2 v_0 + \frac{\pi P a^4}{8l\eta} \qquad \text{(6.2.3 সূত্রের সাহায্যে)}$$

$$\text{কিন্তু} \quad v_0 = -\frac{\eta}{\epsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{Pa}{2l\epsilon}$$

$$\text{সুতরাং} \quad V = \frac{\pi P a^4}{8l\eta}\left(1 + \frac{4\eta}{a\epsilon}\right) \qquad 6.2.4$$

কার্য্যতঃ সান্দ্রতাংকের মান η থেকে হ্রাস পেয়ে $\dfrac{\eta}{1+\dfrac{4\eta}{a\epsilon}}$ হয়। তবে সান্দ্রতাংক হ্রাস পাওয়ার কারণ ব্যাখ্যা করা গেলেও যে চাপে অণুর অধিকাংশ সংঘর্ষই কৈশিকগাত্রের সংগে হয়, সেরূপ চাপে সান্দ্রতার প্রচলিত ধারণাই প্রয়োগযোগ্য থাকে না।

ম্যাক্সওয়েল v_0 এর মান নির্ণয় করতে কল্পনা করেন যে যে সকল অণু আধারগাত্রের সংগে সংঘর্ষে লিপ্ত হয় তাদের f অংশ কৈশিকের গাত্রে শোষিত ও পুনর্বাষ্পীভূত হয়। এই বাষ্পীভবনের সময় অণুগুলি বিভিন্ন দিকে সমভাবে নির্গত হয়। অপরপক্ষে অবশিষ্ট $(1-f)$ অংশ আলোকের মত প্রতিফলিত হয়। অণুর গতিবেগের ম্যাক্সওয়েলীয় বন্টনসূত্র ধ'রে নিয়ে কৈশিকগাত্রে গ্যাসের প্রবাহবেগের মান পাওয়া যায়

$$v_0=\sqrt{\frac{\pi}{2p\rho}}\,\eta\left(\frac{2-f}{f}\right)\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\therefore\quad 6.2.2 \text{ সূত্র থেকে } \frac{\eta}{\epsilon}=\sqrt{\frac{\pi}{2p\rho}}\,\eta\left(\frac{2-f}{f}\right) \qquad 6.2.5$$

$\eta=\frac{1}{3}\rho\bar{c}\lambda$ ও $p=\frac{1}{3}\rho\overline{c^2}=\frac{\pi}{8}\rho(\bar{c})^2$ লিখলে

$$\frac{\eta}{\epsilon}=\frac{2}{3}\lambda\left(\frac{2-f}{f}\right) \qquad 6.2.6$$

6.2.2 সূত্র থেকে বোঝা যায় যে $\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)$ এর মান স্থির ধরলে $a+\frac{\eta}{\epsilon}$ কাল্পনিক ব্যাসার্ধে প্রবাহীর গতিবেগ শূন্য হয়। 6.2.6 অনুযায়ী $\frac{\eta}{\epsilon}$ এর মান সাধারণ ভাবে গড় অবাধপথ λ এর সংগে তুলনীয়। এবং পোয়াস্যোই সূত্রের থেকে উল্লেখযোগ্য চ্যুতি তখনই ঘটে যখন $\frac{4\eta}{a\epsilon}$ অথবা $\frac{\lambda}{a}$-এর মান 1 এর সংগে তুলনীয় হয়।

কুণ্ট ও ভারবুর্গের (Kundt and Warburg, 1875) পরীক্ষায় 6.2.4 সূত্রের পূর্ণ সমর্থন মেলে। এই পরীক্ষায় $\frac{\eta}{\epsilon}$-এর মান বিভিন্ন চাপে নির্ণয় করা হয় এবং দেখা যায় যে $\frac{\eta}{\epsilon}$ সত্যই গড় অবাধপথের সংগে তুলনীয় এবং চাপের ব্যস্তানুপাতী। তবে কুণ্ট ও ভারবুর্গের পরীক্ষায় গ্যাসের যে সর্বনিম্ন

চাপ ব্যবহার করা হয়, তার চেয়েও অল্প চাপে ম্যাক্সওয়েলের তত্ত্ব আর প্রযোজ্য থাকে না। তার কারণ অনুসন্ধান করা যাক।

p চাপে গ্যাসের ঘনত্ব $\rho = \frac{pM}{RT}$ (M = আণবিক ভর), সুতরাং একক সময়ে প্রবাহিত গ্যাসের ভর (6.2.4 থেকে)

$$w = V\rho = \frac{\pi P a^4}{8l\eta} \cdot \frac{pM}{RT}\left(1 + \frac{4\eta}{a\epsilon}\right) \qquad 6.2.7$$

সাধারণ চাপে, যতক্ষণ $\eta/a\epsilon << 1$ থাকে, w ও p এর সমানুপাত বজায় থাকে। নুডসেনের (Knudsen, 1909-10) পরীক্ষায় CO_2 গ্যাসের ক্ষেত্রে পারদের 0·24 সেমি চাপ পর্যন্ত এই সমানুপাত পরিলক্ষিত হয়। এর চেয়ে কম চাপে W p অপেক্ষা অল্প হারে হ্রাস পায়, যার ব্যাখ্যা $\left(1 + \frac{4\eta}{a\epsilon}\right)$ উৎপাদকের সাহায্যে দেওয়া সম্ভব। কুণ্ট ও ভারবুর্গের পরীক্ষায় এর চেয়ে অল্প চাপ ব্যবহৃত হয়নি। নুডসেন আরও অল্প চাপে পরীক্ষা চালিয়ে লক্ষ্য করেন যে চাপ কমার সংগে w এর মান ক্রমশঃ সর্বনিম্নমান লাভ করে, এবং আরও অল্প চাপে কিছুটা বর্ধিত হ'য়ে অবশেষে পুনরায় চাপনিরপেক্ষ হয়। CO_2 গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রায় 0.035 সেমি পারদের চাপে (0·35 টর) w এর মান সর্বনিম্ন হয় এবং প্রায় 2×10^{-3} সেমি পারদ (·02 টর) অপেক্ষা কম চাপে এই মান চাপনিরপেক্ষ থাকে। অতি অল্প চাপে w এর এই চাপ-নিরপেক্ষতা ম্যাক্সওয়েলের প্রণালীতে ব্যাখ্যা করা যায় না। নুডসেনের তত্ত্বে এই ঘটনার ব্যাখ্যা পাওয়া যাবে।

৬.৩ নুডসেনের তত্ত্ব

ম্যাক্সওয়েল কৈশিকগাত্রে অণুর যে শোষণ-ভগ্নাংশ f ব্যবহার করেন, পরবর্তীকালে ব্লাঙ্কেনস্টাইন (Blankenstein, 1923) সূক্ষ্মভাবে তার মান নির্ধারণ করেন। দেখা যায় যে সব গ্যাসের ক্ষেত্রেই $f \simeq 1$। নুডসেন পূর্বেই এরূপ পরিকল্পনা ক'রেছিলেন। তিনি ধরে নেন যে আধারগাত্রে যে সকল অণুর সংঘর্ষ হয় তার প্রতিটিই শোষিত ও পুনর্নিগত হয়। এছাড়া আধার গাত্রে লম্বের সংগে θ কোণে নির্দিষ্ট ঘনকোণে নির্গত অণুর সংখ্যা $\cos\theta$ এর সমানুপাতী হয়। মোটের উপর প্রবাহের দিক অভিমুখে নির্গত অণুর গড় গতিবেগের উপাংশ শূন্য হবে।

4.4.3 সূত্র অনুসারে প্রতি একক আয়তনে $dn_c = \frac{4n}{a^3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{c^2}{a^2}} c^2 dc$ সংখ্যক অণুর গতিবেগ c ও $c+dc$ সীমার মধ্যে থাকে। আধারগাত্রে এই অণুগুলির সংঘাত সংখ্যা একক সময়ে ও একক ক্ষেত্রফলে (2.3.3 অনুযায়ী) $\frac{c}{4} dn_c$। গতিবেগের যে উপাংশ আধারগাত্রের সমান্তরাল (অর্থাৎ কৈশিকের অক্ষ বরাবর) তার মান গড়ে w ধরা যাক। w কে c এর সমানুপাতী ধরা যেতে পারে, সেক্ষেত্রে $w = \beta c$ লেখা যাক। অণু ও কৈশিক গাত্রের মধ্যে প্রতি সংঘর্ষে গড়ে $m\beta c$ পরিমাণ ভরবেগ কৈশিকে সঞ্চারিত হয়। এইভাবে সকল গতিবেগের অণুর দ্বারা মোট সঞ্চারিত ভরবেগ একক সময়ে

$$Q = \int_0^\infty \frac{c}{4} dn_c . m\beta c$$

$$= \frac{n\beta m}{a^3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{a^2}} c^4 dc$$

$$= \frac{3}{8} n\beta m a^2$$

$$= \frac{3\pi}{32} n\beta m(\bar{c})^2 \qquad 6.3.1$$

কিন্তু কৈশিকের মধ্যে গ্যাসের প্রবাহজনিত যৌথ গতিবেগ $v = \beta\bar{c}$।

$$\text{সুতরাং} \quad Q = \frac{3\pi}{32} \rho\bar{c}v \quad (\rho = nm) \qquad 6.3.2$$

কৈশিকের মোট আভ্যন্তরীণ ক্ষেত্রফল $2\pi al$, অর্থাৎ মোট

$$2\pi al . Q$$

পরিমাণ বল কৈশিকের উপর কাজ করে। এই বল প্রকৃতপক্ষে কৈশিকের দুই প্রান্তে চাপের প্রভেদজনিত এবং $P . \pi a^2$ এর সমান।

$$\text{অতএব;} \quad 2\pi al . \frac{3\pi}{32} \rho\bar{c}v = P . \pi a^2$$

অথবা একক সময়ে প্রবাহিত গ্যাসের ভর

$$W = \pi a^2 \rho v = \frac{16}{3} \frac{Pa^3}{\bar{c}l} \qquad 5.3.3$$

W এর এই মান চাপ p এর উপর নির্ভরশীল নয়। অতি অল্প চাপে নুডসনের পরীক্ষায় W এর যে চাপ নিরপেক্ষতা পরিদৃষ্ট হয় তার সংগে এই মানের পরিমাণগত সঙ্গতি দেখা যায়।

৬.৪ নিঃসরণ

কোন গ্যাস যখন সূক্ষ্ম ছিদ্রের মধ্য দিয়ে নিঃসৃত হয় তখন তাকে **নিঃসরণ** বলা হয়। সাধারণ চাপে নিঃসরণ প্রবাহী গতিবিদ্যার (hydrodynamics) নিয়ম অনুসরণ করে। গ্রেহ্যাম (Graham, ১৮৪৬) পরীক্ষার দ্বারা নির্বাতকক্ষে বিভিন্ন গ্যাসের নিঃসরণের সূত্র নির্ধারণ করেন। গ্রেহ্যামের সূত্র অনুসারে নির্দিষ্ট চাপ ও উষ্ণতায় ρ ঘনত্ববিশিষ্ট কোন গ্যাসের নিঃসরণের হার $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ এর সমানুপাতী হয়।

অল্প চাপে যখন গ্যাসের গড় অবাধপথের দৈর্ঘ্য ছিদ্রের আকারের সংগে তুলনীয় হয় তখন নিঃসরণের প্রকৃতি পরিবর্তিত হয়। এই অবস্থায় আণবিক তত্ত্বের সাহায্যে নিঃসরণের হার নির্ধারণ করা যেতে পারে। S ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ছিদ্রের উপর মোট $\frac{n\bar{c}}{4} \cdot S$ সংখ্যক অণু প্রতি সেকেণ্ডে ছিদ্রের যে কোনও পার্শ্ব থেকে পতিত হয় (2.3.3 সূত্র)। অণুর ভর m হলে ছিদ্রের একক ক্ষেত্রফল পিছু $\frac{mn\bar{c}}{4} = \frac{\rho\bar{c}}{4}$ ভরবিশিষ্ট গ্যাস প্রতি সেকেণ্ডে ছিদ্র দিয়ে নিঃসৃত হয়। ρ বা গ্যাসের ঘনত্ব যদি ছিদ্রের দুই পার্শ্বে ρ_1 ও ρ_2 হয় তবে প্রথম পার্শ্ব থেকে দ্বিতীয় পার্শ্ব অভিমুখে গ্যাসের প্রবাহের হার হবে

$$w = \frac{\bar{c}}{4}(\rho_1 - \rho_2) \qquad 6.4.1$$

ধরা যাক একক চাপে ঘনত্বের মান ρ_o। অর্থাৎ

$$\rho_o = \frac{\rho}{p} = \frac{8}{\pi(\bar{c})^2} \qquad 6.4.2$$

সুতরাং
$$w = \frac{\rho_o \bar{c}}{4}(p_1 - p_2)$$
$$= \sqrt{\frac{\rho_o}{2\pi}}(p_1 - p_2)$$

একক চাপে অর্থাৎ ρ_0 ঘনত্বে এই গ্যাসের আয়তন হবে

$$V_0 = \frac{w}{\rho_0} = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2\pi}\rho_0} \qquad 6.4.3$$

6.4.3 সূত্র থেকে গ্রেহ্যামের পরীক্ষালব্ধ সূত্রের সমর্থন পাওয়া যায়।

নুডসেন 10^{-2} টর থেকে 100 টর চাপে সূক্ষ্ম ছিদ্রের মধ্য দিয়ে H_2, O_2 ও CO_2 গ্যাসের নিঃসরণ পর্যবেক্ষণ করেন। ছিদ্রের ব্যাস a হ'লে নুডসেনের সিদ্ধান্ত অনুযায়ী $\lambda \geqslant 10a$ হ'লে 6.4.3 সূত্র এবং $\lambda \leqslant \frac{a}{10}$ হ'লে প্রবাহী-গতিবিদ্যার নিয়ম প্রযোজ্য হয়। দ্বিতীয় অবস্থায়, অর্থাৎ অধিক চাপে গ্যাস-অণুগুলির পা রস্পারিক সংঘর্ষ প্রাধান্য লাভ করে এবং তাদের গতি সম্পূর্ণ স্বতন্ত্র থাকে না। নিঃসরণের পূর্ববর্ণিত বিশ্লেষণও এই অবস্থায় প্রয়োগ করা যায় না।

৬.৫ তাপজ নির্গমন

নিঃসরণের ক্ষেত্রে যে ছিদ্রের মধ্য দিয়ে গ্যাস নিঃসৃত হয় তার দুই পার্শ্বে চাপের পার্থক্য কল্পনা করা হয়। যখন দুই পার্শ্বে চাপ সমান থাকে অথচ উষ্ণতার বিভিন্নতা হেতু গ্যাস ছিদ্রের মধ্য দিয়ে নির্গত হয় তখন তাকে **তাপজ নির্গমন** (Thermal Transpiration) বলা হয়।

কল্পনা করা যাক, কোন গ্যাসের আধারের মধ্যে এক অতি সূক্ষ্ম বিভাজক পাত আধারটিকে দুই অংশে বিভক্ত করে। এই দুই অংশে গ্যাসের চাপ p একই কিন্তু নিরপেক্ষ উষ্ণতা T_1 ও T_2। উষ্ণতা বিভিন্ন হলে ঘনত্ব ও অণুর গড় গতিবেগ বিভিন্ন হবে। দুই অংশে ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_1 ও ρ_2 এবং গড় গতিবেগ যথাক্রমে $\bar{c}_1$ ও $\bar{c}_2$ ধরা যাক। বিভাজকের মধ্যে কোন ছিদ্র থাকলে তার একক ক্ষেত্রফল পিছু (6.4.1 সূত্রের তুলনা দ্বারা)

$$w = \frac{1}{4}(\rho_1\bar{c}_1 - \rho_2\bar{c}_2) \qquad 6.5.1$$

ভরবিশিষ্ট গ্যাস একক সময়ে ρ_1 থেকে ρ_2 ঘনত্বের দিকে প্রবাহিত হবে।

কিন্তু $\rho_1\bar{c}_1 = \frac{mp}{kT_1}\sqrt{\frac{8kT_1}{m\pi}}$

$$= p\sqrt{\frac{8m}{\pi k T_1}}$$

$$\text{এবং} \quad \rho_2 \overline{c_2} = p\sqrt{\frac{8m}{\pi k T_2}}$$

$$\text{সুতরাং} \quad w = p\sqrt{\frac{m}{2\pi k}}\left(\frac{1}{\sqrt{T_1}} - \frac{1}{\sqrt{T_2}}\right) \qquad 6.5.2$$

যদি $T_2 > T_1$ হয় তবে w এর মান ঋণাত্মক হবে অর্থাৎ আধারের অপেক্ষাকৃত শীতল অংশ থেকে উষ্ণতর অংশে গ্যাসের প্রবাহ ঘটবে। ক্রমশঃ দ্বিতীয় অংশের চাপ প্রথমাংশের তুলনায় বৃদ্ধি পাবে এবং যখন

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}} \quad \text{অর্থাৎ} \quad \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \qquad 6.5.3$$

এই সর্ত প্রতিপালিত হবে তখন $\rho_1 \overline{c_1} = \rho_2 \overline{c_2}$ হবে ও গ্যাসের প্রবাহ বন্ধ হবে।

রেনল্ডস্ (Reynolds, 1879) এর পরীক্ষায় গ্যাসের কক্ষের মধ্যস্থলে এক সছিদ্র বিভাজক প্রাচীর রাখা হয় এবং প্রাচীরের দুইপার্শ্বে উষ্ণতা বিভিন্ন রাখা হয় (সাধারণতঃ 8°C এবং 100°C)। এই অবস্থায় কয়েক ঘণ্টা রাখার পর কক্ষের উভয়াংশে গ্যাসের চাপ মাপা হয়। দেখা যায় যে অতি অল্প চাপে, অর্থাৎ যখন গ্যাসের গড় অবাধপথ ছিদ্র সমূহের ব্যাস বা দৈর্ঘ্যের তুলনায় দীর্ঘ থাকে তখন 6.5.3 সূত্র ঠিকই প্রতিপালিত হয়। অপেক্ষাকৃত উচ্চ চাপে ঐ সূত্র থেকে ব্যতিক্রম ঘটে।

নুডসেন সছিদ্র বিভাজকের পরিবর্তে কৈশিকের গুচ্ছ ব্যবহার ক'রে এক কক্ষে গ্যাসের চাপ অপর কক্ষের দশগুণ করতে সক্ষম হন। উল্লেখযোগ্য এই যে এ ধরনের কৈশিকে বা কোন সছিদ্র পদার্থের ছিদ্রের মধ্য দিয়ে গ্যাসের নির্গমনে কৈশিক বা ছিদ্রগুলির দৈর্ঘ্যকে উপেক্ষা করা যায় না এবং সেহেতু পূর্বের সর্ত বজায় থাকে না। এরূপ অবস্থায় যদি কৈশিক বা ছিদ্রের দৈর্ঘ্য বরাবর $\frac{p}{\sqrt{T}}$ এর মান স্থির থাকে তবেই গ্যাসের প্রবাহ বন্ধ হয়।

৬.৬ অল্প চাপে তাপের পরিবহণ

এই অধ্যায়ে আলোচিত অন্যান্য প্রক্রিয়ার মত অতি অল্প চাপে গ্যাসের মধ্যে তাপের পরিবহণও ভিন্ন উপায়ে ঘটে। বস্তুতঃ এরূপ চাপে গ্যাস-আধারের প্রাচীরের যে অংশদ্বয় বিভিন্ন উষ্ণতায় অবস্থিত থাকে তাদের সংগে গ্যাস-অণুর সংঘর্ষই গুরুত্বলাভ করে, এক অণুর সংগে অপর অণুর সংঘর্ষ তুলনায় কমই ঘটে।

ধরা যাক তাপের পরিবহণ T_a ও T_b উষ্ণতায় রক্ষিত A ও B দুই তলের মধ্যে কোন গ্যাসের মাধ্যমে সংঘটিত হয়। A অথবা B এর সংগে সংঘর্ষে লিপ্ত হওয়ার পর কোন অণুর গতিবেগ যথাক্রমে T_a ও T_b উষ্ণতায় অবস্থিত গ্যাসের অণুর গতিবেগে মত ম্যাক্সওয়েলীয় সূত্র অনুযায়ী বণ্টিত হয়, এরূপ অঙ্গীকার বর্তমান আলোচনায় স্বীকার করা হবে।

গ্যাসের অণুর ঘনত্বসংখ্যা n, তার মধ্যে একক আয়তনে n_a সংখ্যার গতিবেগ A তল অভিমুখী এবং n_b সংখ্যার গতিবেগ B তল অভিমুখী। T_a ও T_b অসমান হওয়ায় গ্যাসের মধ্যে প্রতিসাম্য (Symmetry) থাকে না; সুতরাং $n_a \neq n_b$। A ও B তল থেকে বিকীর্ণ অণুগুলি যথাক্রমে B ও A তল অভিমুখে যে গতিবেগ লাভ করে তার গড় মান $\bar{c}_a$ ও $\bar{c}_b$।

গ্যাসের মধ্যে B তল অভিমুখী c_a ও $c_a + dc_a$ সীমার মধ্যে গতিবেগ-বিশিষ্ট অণুর ঘনত্বসংখ্যা (4.4.3 অনুসারে)

$$dn_a = \frac{4n_a}{\alpha_a^3 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{c_a^2}{\alpha_a^2}} c_a^2 \, dc_a$$

এখানে $\alpha_a = \sqrt{\frac{2kT_a}{m}}$। এই অণুসমূহের $\frac{1}{2} dn_a c_a$ সংখ্যক অণু একক সময়ে B তলের একক ক্ষেত্রফলে পতিত হয়। (এখানে 2.3.3 সূত্রকে সামান্য পরিবর্তিত করা হয়েছে। dn_a সংখ্যক অণুর প্রতিটিই B তল অভিমুখী এবং 4π এর পরিবর্তে 2π ঘনকোণে সমভাবে বিন্যস্ত। এইজন্য 2 গুণকের প্রভেদ হয়) প্রতিটি অণু $\frac{1}{2} mc_a^2$ পরিমাণ গতীয় শক্তি B তলে আনয়ন করে। অবশ্য অণুর রৈখিক ব্যতীত অন্যপ্রকার গতীয় শক্তি থাকা সম্ভব, তবে উপস্থিত শুধু রৈখিক গতিই বিবেচিত হবে। A তল থেকে B তলে আনীত মোট গতীয় শক্তির পরিমাণ

$$E_a = \int_0^\infty \frac{1}{2} dn_a c_a \cdot \frac{1}{2} mc_a^2$$

$$= \frac{mn_a}{\alpha_a^3 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{c_a^2}{\alpha_a^2}} \cdot c_a^5 \, dc_a$$

$$= \frac{\pi mn_a \bar{c}_a^3}{8} \quad \left(\because \ \alpha_a = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{c}_a \right) \qquad 6.6.1$$

অনুরূপভাবে B তল থেকে বিকীর্ণ অণুর দ্বারা A তলে একক সময়ে ও একক ক্ষেত্রফলপিছু

$$E_b = \frac{\pi\, m n_b \bar{c}_b{}^3}{8}$$

পরিমাণ গতীয় শক্তি আনীত হয়। যদি $T_a > T_b$ হয় তবে B তল একক সময়ে একক ক্ষেত্রফলপিছু E_T পরিমাণ গতীয় শক্তি লাভ করে, যেখানে

$$E_T = E_a - E_b = \frac{\pi m}{8}\left(n_a \bar{c}_a{}^3 - n_b \bar{c}_b{}^3\right) \qquad 6.6.2$$

A ও B তলের একক ক্ষেত্রফলে অণুর সংঘাতের হার যথাক্রমে $\frac{n_b \bar{c}_b}{2}$ ও $\frac{n_a \bar{c}_a}{2}$ ।

যে কোনও তলে সংঘাতের হার ও অণুবিকিরণের হার অবশ্যই সমান, সুতরাং $n_a \bar{c}_a = n_b \bar{c}_b$ । এছাড়া মোট ঘনত্ব সংখ্যা $n = n_a + n_b$ এবং গড় গতিবেগ

$$\bar{c} = \frac{n_a \bar{c}_a + n_b \bar{c}_b}{n}, \quad \text{অর্থাৎ } n_a \bar{c}_a = n_b \bar{c}_b = \tfrac{1}{2} n \bar{c}$$

এবং $$E_T = \frac{\pi m}{16} \cdot n\bar{c}\left(\bar{c}_a{}^2 - \bar{c}_b{}^2\right) \qquad 6.6.4$$

E_T এর এই মানকে সহজেই গ্যাসের উষ্ণতা ও চাপের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। ধরা যাক একক চাপে ও $0°C$ উষ্ণতায় গ্যাসের ঘনত্ব ρ_{00} । গ্যাসের গড় উষ্ণতায় ($T°C$) ও একক চাপে এই ঘনত্ব হবে $\rho_0 = \rho_{00} \frac{273}{T}$ । এখন 6.4.2 অনুযায়ী

$$\bar{c} = \left(\frac{8}{\pi \rho_{00}} \cdot \frac{T}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\bar{c}_a$ ও $\bar{c}_b$ এর অনুরূপ মান ব্যবহার করা হ'লে পাওয়া যায়

$$E_T = p\left(\frac{2}{273 \pi \rho_{00}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T_a - T_b}{\sqrt{T}} \qquad 6.6.5$$

6.6.5 সূত্র থেকে কেবলমাত্র রৈখিক গতীয় শক্তির পরিবহণের হার পাওয়া যায়। যদি অণুসমূহের গতীয় শক্তির কিছু অংশ ঘূর্ণন বা কম্পনজাত হয় তবে 6.6.5 সূত্রের কিছু সংশোধন প্রয়োজন হয়। দেখা যায় যে যদি অণুর রৈখিক ব্যতীত অন্যপ্রকার স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা β হয় (5.4 অংশ দ্রষ্টব্য) তবে এরূপ গতীয় শক্তির পরিবহণের হার হয়

$$E_R = \frac{3}{4} \cdot \frac{\beta}{3} E_T \qquad 6.6.6$$

অর্থাৎ এরূপ শক্তির পরিবহণে অণুর দক্ষতা রৈখিক গতীয় শক্তির তুলনায় $\frac{\beta}{4}$ গুণ।

মোট পরিবাহিত শক্তির পরিমাণ

$$E = E_T + E_R = \left(1 + \frac{\beta}{4}\right) E_T$$

$$= \frac{p}{4} \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{2}{273\pi\rho_{00}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T_a - T_b}{\sqrt{T}} \qquad \text{(5.4.6 সূত্র থেকে)}$$

যদি গ্যাসের আণবিক ভর $= M$ হয় তবে

$$\rho_{00} = \text{Mgm}/22414 \text{ cc} \times 1{\cdot}0132 \times 10^6 \text{ dyne/cm}^2$$

এবং ρ_{00} এর এই মান ব্যবহার ক'রে পাওয়া যায়

$$E = 1819\, p\, \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{T_a - T_b}{\sqrt{MT}} \qquad 6.6.7$$

6.6.7 সূত্র থেকে বোঝা যায় যে অল্পচাপে তাপের পরিবহণ সাধারণ চাপের থেকে সম্পূর্ণ ভিন্ন প্রকৃতির। তাপপরিবহণের হার এক্ষেত্রে চাপের সমানুপাতী। তাছাড়া যে দুই তলের মধ্যে তাপের পরিবহণ ঘটে, পরিবহণের হার তাদের মধ্যেকার দূরত্বের উপর নির্ভরশীল হয় না।

পরীক্ষার দ্বারা তাপপরিবহণের যে হার নির্ণীত হয় তার মান চাপ p ও উষ্ণতার প্রভেদ $T_a - T_b$ এর সমানুপাতী হ'লেও 6.6.7 সূত্র থেকে প্রত্যাশিত মান অপেক্ষা অনেক কম। স্মলুকভ্স্কি (Smoluchowski) ও নুডসেনের মত অনুযায়ী এই অসঙ্গতির কারণ পূর্বের অঙ্গীকারের অসত্যতা—A বা B তলের সংগে সংঘর্ষের পর কোন অণুই প্রকৃতপক্ষে ঐ তলের উষ্ণতা অনুযায়ী গতীয় শক্তি লাভ করে না। যদি অণুর গড় গতীয় শক্তি সংঘর্ষের পূর্বে E_i, সংঘর্ষের পরে E_f এবং সংঘর্ষের তলের উষ্ণতা অনুযায়ী E_T হয় তবে ধরা যেতে পারে যে

$$E_f - E_i = a\ (E_T - E_i) \qquad 6.6.8$$

এই সূত্রে ব্যবহৃত 'a' ধ্রুবকের মান 1 অপেক্ষা কম। বস্তুতঃ, সংঘর্ষতল যতই অসমান হবে অর্থাৎ ঐ তল থেকে পুনর্বিকীর্ণ হওয়ার পূর্বে কোন অণু তলমধ্যস্থ কণিকাগুলির সংগে যত বেশীবার সংঘর্ষে লিপ্ত হবে, সংঘর্ষতলের সংগে তাপসাম্যে আসার জন্য ঐ অণু তত বেশী সুযোগ পাবে। 'a' ধ্রুবকের মানও এই অবস্থায় 1 এর কাছাকাছি অগ্রসর হবে।

ধরা যাক, A ও B তল থেকে বিকীর্ণ অণুর উষ্ণতা T'_a ও T'_b । উষ্ণতা ও গতীয় শক্তি যেহেতু সমানুপাতী, 5.6.8 সূত্র থেকে লেখা যায় :

A তলে সংঘর্ষের জন্য $T'_a - T_b' = a(T_a - T_b')$

এবং B তলে সংঘর্ষের জন্য $T'_b - T'_a = a(T_b - T'_a)$ ।

দুই সমীকরণের অন্তরফল থেকে $T'_a - T'_b = \dfrac{a}{2-a}(T_a - T_b)$ 6.6.9

নুডসেন পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণ করেন যে 'a' ধ্রুবকের মান রৈখিক এবং ঘূর্ণন বা কম্পনজাত গতীয় শক্তির ক্ষেত্রে একই । গতীয় শক্তি বহনকারী অণুগুলির উষ্ণতা যেহেতু T_a ও T_b এর পরিবর্তে প্রকৃতপক্ষে T'_a ও T_b' থাকে, 6.6.7 সূত্রে $(T_a - T_b)$ এর স্থানে $(T'_a - T'_b)$ বা $\dfrac{a}{2-a}(T_a - T_b)$ ব্যবহার করাই বিধেয় । ঐ সূত্রের পরিশোধিত রূপ :

$$E = 1819\, p\, \frac{a}{2-a} \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{T_a - T_b}{\sqrt{MT}} \qquad 6.6.10$$

'a' ধ্রুবকটিকে 'উপযোজন গুণাংক' (accommodation co-efficient) বলা হয় । 6.6.10 সূত্রের সাহায্যে এই গুণাংকের মান পরীক্ষার দ্বারা নির্ণয় করা যায় । দেখা গেছে যে এই গুণাংক উষ্ণতা, তাপপরিবাহী গ্যাস ও A বা B তলের প্রকৃতির উপর বহু পরিমাণে নির্ভরশীল ।

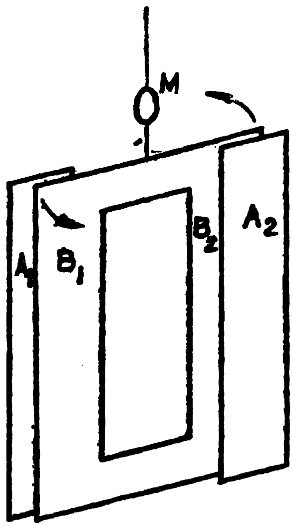
৬.৭ নুডসেনের নিরপেক্ষ প্রেষমান (absolute manometer)

অতি অল্পচাপে গ্যাসের তাপপরিবহণের প্রকৃতির উপর ভিত্তি ক'রে নুডসেন এক নিরপেক্ষ প্রেষমানের পরিকল্পনা করেন । এই যন্ত্রে গ্যাসের চাপ প্রত্যক্ষভাবে মাপা যায়, অর্থাৎ অন্য কোন প্রেষমানের সাহায্যে এই যন্ত্রের ক্রমাঙ্কনের প্রয়োজন হয় না ।

এই যন্ত্রের (৬.১ চিত্র) প্রধান অংশ দুইটি নিশ্চল পাত A_1, A_2 এবং কোয়ার্জ সূত্র দ্বারা প্রলম্বিত ও একটি ফ্রেমের সংগে সংযুক্ত দুইটি ঘূর্ণনশীল পাত B_1 ও B_2 । $A_1\, A_2$ পাত দুইটিকে বৈদ্যুতিক উপায়ে উত্তপ্ত করা যায় এবং $B_1 B_2$ পাত দুইটির ঘূর্ণনের পরিমাণ M আয়নার সাহায্যে নির্ণয় করা যায় । সমগ্র যন্ত্রটি যে গ্যাসের চাপ নির্ণয় করা প্রয়োজন তার মধ্যে রাখা হয় ।

ধরা যাক A ও B পাতের নিরপেক্ষ উষ্ণতা যথাক্রমে T_a ও T_b, গ্যাস-অণুর ভর m, A_1B_1 এবং A_2B_2 পাতগুলির মধ্যবর্তী সঙ্কীর্ণ আয়তনে A ও B পাত অভিমুখী গতিসম্পন্ন অণুর ঘনত্বসংখ্যা যথাক্রমে n_a ও n_b ।

অণুর গড় অবাধপথ A_1B_1 বা A_2B_2 পাতগুলির মধ্যে দূরত্বের তুলনায় দীর্ঘ ব'লে ধরা হবে।



চিত্র ৬.১—নুডসেনের প্রেষমান

A থেকে নির্গত B অভিমুখী গতিসম্পন্ন অণুগুলি পুরাপুরি A পাতের উষ্ণতায় থাকে (অর্থাৎ $a=1$) এরূপ কল্পনা করা যাক। এই অণুগুলির দ্বারা এককসময়ে B পাতের একক ক্ষেত্রফলপিছু আনীত ভরবেগের পরিমাণ n_akT_a। অনুরূপভাবে ঐ ক্ষেত্রফলে ঐ সময়ে B পাত থেকে বিকীর্ণ অণুগুলির দ্বারা প্রদত্ত প্রতিক্ষিপ্ত (recoil) ভরবেগ n_bkT_b। মোটের উপর, B পাতের যে তলগুলি A-অভিমুখী তাদের উপর চাপ

$$n_akT_a+n_bkT_b$$

B পাতের অপর তলগুলিতেও গ্যাস অণুগুলি চাপ প্রদান করে। যদি গ্যাসের উষ্ণতা B পাতের সমান অর্থাৎ T_b হয় এবং গ্যাসঅণুর মোট ঘনত্বসংখ্যা n হয়, তবে এই চাপের পরিমাণ $p=nkT_b$ হবে। B পাতের একক ক্ষেত্রফল পিছু মোট বলের পরিমাণ

$$P=n_akT_a+n_bkT_b-nkT_b \qquad 6.7.1$$

যেহেতু গড় গতিবেগ সর্বদাই উষ্ণতার বর্গমূলের সমানুপাতী, অতএব 6.6.3 সূত্র থেকে

$$n_a\sqrt{T_a}=n_b\sqrt{T_b}=\tfrac{1}{2}n\sqrt{T_b}$$

অথবা $n_a = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{T_b}{T_a}}$; $n_b = \frac{n}{2}$ এবং 6.7.1 সূত্র থেকে

$$p = \frac{2P}{\sqrt{\frac{T_a}{T_b}} - 1} \quad 6.7.2$$

যদি T_a ও T_b প্রায় সমান হয়, তবে $p = 4PT_b/(T_a - T_b)$ 6.7.3

B পাতগুলির উপর এই বল পাতগুলিকে A-পাত থেকে দূরে বিকর্ষণ করে। ধরা যাক B পাতগুলির প্রতিটির ক্ষেত্রফল α এবং প্রলম্বন-অক্ষ থেকে গড় দূরত্ব d। মোট কৌণিক বিক্ষেপণকারী বলযুগ্মের পরিমাণ এক্ষেত্রে $2P\alpha \cdot d$। B পাতসংলগ্ন ফ্রেমের কৌণিক বিক্ষেপ যদি θ হয় ও কোয়ার্জ সূত্রের একক কৌণিক বিক্ষেপের জন্য যদি τ বলযুগ্মের প্রয়োজন হয় (τ = ব্যাবর্তন-ধ্রুবক, torsional constant) তবে

$$P = \frac{\tau\theta}{2\alpha d} \quad 6.7.4$$

শেষোক্ত সূত্র থেকে P এর মান নির্ণয় করলে 6.7.2 বা 6.7.3 সূত্র থেকে চাপ p জানা যায়।

উপযোজন-গুণাংক 'a' এর মান যদি 1 না হয় তবে p এর মান শুদ্ধ করা আবশ্যক। তবে যদি $T_a \approx T_b$ হয় তবে দেখা যায় যে এই সংশোধন ব্যতীতও মোটামুটিভাবে শুদ্ধ মান পাওয়া যায়।

নুডসেনের প্রেষমান দ্বারা চাপের যে মান পাওয়া যায়, তা যন্ত্রের মধ্যে ব্যবহৃত গ্যাসের কোন ধর্মের উপর নির্ভরশীল নয়। এই অর্থেই এই প্রেষমানকে 'নিরপেক্ষ' বলা যায়। তবে অতি অল্প চাপে ব্যতীত এই প্রেষমান ব্যবহার করা যায় না কেননা সে অবস্থায় গড় অবাধপথ যথেষ্ট দীর্ঘ থাকে না, উপরন্তু গ্যাসের পরিচলন-স্রোত (convection current) B পাতগুলির এলোমেলো বিক্ষেপ সৃষ্টি করে।

সপ্তম অধ্যায়

বাস্তব গ্যাস

৭.১ বাস্তব গ্যাসের আচরণ

দ্বিতীয় অধ্যায়ে কল্পনা করা হয়েছে যে গ্যাস অণুর আয়তন উপেক্ষণীয় এবং এক সংঘর্ষকাল ব্যতীত অণুগুলির মধ্যে আকর্ষণ বা বিকর্ষণের অস্তিত্ব নেই। মূলতঃ এই দুই অঙ্গীকারের উপর ভিত্তি ক'রে আদর্শ গ্যাসের বয়েল ও চার্লস্ সূত্র পাওয়া গেছে—এক গ্রাম অণু গ্যাসের ক্ষেত্রে

$$pV_0 = \frac{1}{3}M\overline{c^2} = RT\text{।}$$

যে সমীকরণের সাহায্যে নির্দিষ্ট পরিমাণ পদার্থের অবস্থাজ্ঞাপক কয়েকটি চলরাশির মধ্যে সম্পর্ক দেখানো যায় তাকে ঐ পদার্থের **অবস্থা সমীকরণ** বলে। উপরের সূত্রে আদর্শ গ্যাসের চাপ, আয়তন ও নিরপেক্ষ উষ্ণতার মধ্যে সম্পর্ক প্রদর্শিত হ'য়েছে। তাই এই সূত্রকে আদর্শ গ্যাসের অবস্থা সমীকরণ বলে। স্বাভাবিকভাবেই আশা করা যায় যে উল্লিখিত দুই অঙ্গীকার যখন মোটামুটিভাবে গ্রাহ্য হয় অর্থাৎ যখন গ্যাসের চাপ অল্প ও উষ্ণতা অধিক থাকে কেবল তখনই এই সমীকরণ প্রযোজ্য হবে বিভিন্ন বিজ্ঞানীর পরীক্ষা থেকে দেখা গেছে যে অন্য অবস্থায় গ্যাসের আচরণে বয়েল ও চার্লস্ সূত্র থেকে অল্পবিস্তর ব্যত্যয় ঘটে।

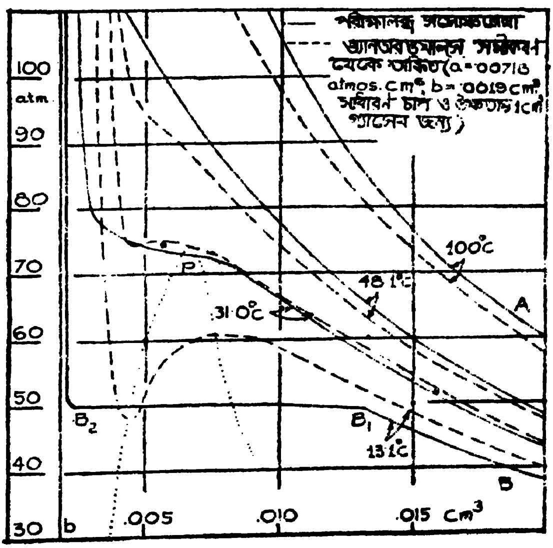
এই ব্যত্যয় স্বয়ং বয়েলের পরীক্ষাতেও লক্ষিত হ'য়েছিল। পরবর্তীকালে রেনো (Regnault), অ্যাণ্ড্রুজ (Andrews), আমাগাট (Amagat), কামারলিং অনাস (Kamerling Onnes) প্রমুখ বিজ্ঞানীর উচ্চচাপে অথবা নিম্ন উষ্ণতায় সম্পাদিত পরীক্ষায় বাস্তব গ্যাসের আচরণ পরিমাণগতভাবে নির্ধারিত হয় এবং এই সকল পরীক্ষালব্ধ ফলের সাহায্যে বাস্তব গ্যাসের অবস্থা সমীকরণ নির্ণয়ের প্রচেষ্টা হয়। অ্যাণ্ড্রুজ ও আমাগাটের পরীক্ষার ফল পরবর্তী অংশে বর্ণিত হবে।

বাস্তব গ্যাসের আচরণের বৈশিষ্ট্য আরও এক উপায়ে পরিদৃষ্ট হয়। আদর্শ গ্যাসের আভ্যন্তরীণ শক্তি কেবলমাত্র অণুর গতীয় শক্তির যোগফল, এই শক্তির কোন অংশই স্থৈতিক নয়। কিন্তু বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে চাপের হ্রাস বা আয়তনের বৃদ্ধির সংগে অণুগুলি পরস্পরের আকর্ষণের বিরুদ্ধে অপসৃত হয় ও

স্থৈতিক শক্তি ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়। রুদ্ধতাপ অবস্থায় কোন বাহ্যিক কার্য ছাড়াই এই প্রক্রিয়ায় গ্যাসের অণুর গতীয় শক্তি বা গ্যাসের উষ্ণতা কিছুটা হ্রাস পায়। অপর পক্ষে উষ্ণতা স্থির থাকলে আভ্যন্তরীণ শক্তি বাড়ে যার ফলে $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ সর্বদা ধনাত্মক ও $\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T$ সর্বদা ঋণাত্মক হয়। আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে উভয়রাশিরই প্রত্যাশিত মান শূন্য এবং এই নিয়ম **জুলের সূত্র** (Joule's Law) রূপে পরিচিত। জুল ও কেলভিনের (Lord Kelvin বা W. Thomson) পরীক্ষায় (1852) বাস্তব গ্যাসের আচরণে যুগপৎ বয়েল ও জুলের সূত্র থেকে ব্যত্যয় দেখা যায়।

৭.২ অ্যাণ্ড্রুজ ও আমাগাটের পরীক্ষা

অ্যাণ্ড্রুজের পরীক্ষায় অতি উচ্চচাপ পর্যন্ত বিশুদ্ধ কার্বন-ডাই-অক্সাইড গ্যাসের সমোষ্ণ রেখার প্রকৃতি নির্ধারিত হয়। 7.1 চিত্রে CO_2 গ্যাসের



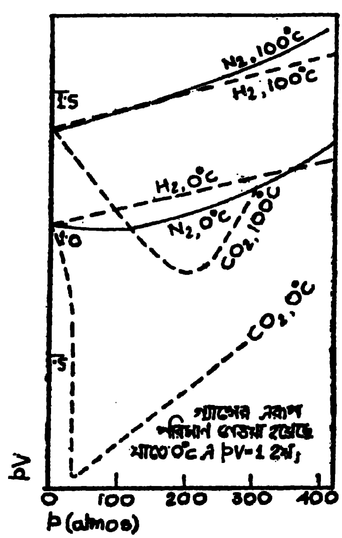
চিত্র ৭.১—CO_2 গ্যাসের সমোষ্ণরেখা

সমোষ্ণ রেখা প্রদর্শিত হ'ল। লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে সমোষ্ণ রেখাগুলির মধ্যে দুই প্রকার প্রকৃতি বর্তমান। 31·0°C অপেক্ষা উচ্চতর উষ্ণতায় সমোষ্ণ রেখাগুলি মোটামুটি আয়তপরাবৃত্তের আকার ধারণ করে (যথা A)। এরূপ উষ্ণতায় গ্যাসীয় কার্বন-ডাই অক্সাইডের উপর চাপ ক্রমশঃ বৃদ্ধি প্রাপ্ত হ'লে আয়তন ক্রমাগতই হ্রাস পায়, কিন্তু গ্যাসটি কখনই তরলীভূত হয় না। 31·0°C

অপেক্ষা অল্প উষ্ণতায় (সমোষ্ণ রেখা B) কোন নির্দিষ্ট চাপে (B_1 বিন্দু) গ্যাসীয় কার্বন-ডাই-অক্সাইডের তরলীভবন আরম্ভ হয়। যতক্ষণ না সমস্ত গ্যাস তরলীভূত হয় ততক্ষণ চাপ অপরিবর্তিত থাকে। গ্যাস সম্পূর্ণরূপে তরলীভূত হ'লে চাপের উত্তরোত্তর বৃদ্ধির সংগে তরলের আয়তনে পূর্বের তুলনায় সামান্য হ্রাস ঘটে। উষ্ণতা বর্ধিত হয়ে যত 31·0°C এর নিকটবর্তী হয়, সমোষ্ণ রেখার B_1B_2 অংশের অনুরূপ অনুভূমিক অংশ দৈর্ঘ্যে ততই হ্রাস পায়। অবশেষে 31·0°C উষ্ণতায় এই অনুভূমিক অংশ কেবলমাত্র এক বিন্দুতে (P) পরিণত হয়, সমোষ্ণরেখার নতির $\left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)\right]_T$ মান যেখানে শূন্য।

এই 31·0°C উষ্ণতাকে কার্বন-ডাই-অক্সাইডের **সন্ধি-উষ্ণতা** (Critical temperature) বলে ও P বিন্দুকে **সন্ধিবিন্দু** (Critical point) বলে। P বিন্দুতে চাপ ও গ্যাসের আপেক্ষিক আয়তনকে যথাক্রমে **সন্ধিচাপ** (Critical pressure) ও **সন্ধি-আয়তন** (Critical volume) বলে। কার্বন-ডাই-অক্সাইডের ক্ষেত্রে সন্ধিচাপ ও সন্ধি-আয়তনের মান যথাক্রমে 73·8 atoms. ও 2·14 cm^3/gm।

আমাগাট অধিকতর উচ্চ চাপ পর্যন্ত বিভিন্ন গ্যাসের আচরণ লক্ষ্য



চিত্র ৭.২—আমাগাটের পরীক্ষার ফল

করেন। আমাগাটের পরীক্ষার ফল 7·2 চিত্রে দেখা যাবে। এই চিত্রে বিভিন্ন স্থির উষ্ণতায় p এর সংগে গুণফল 'pV' এর পরিবর্তন প্রদর্শিত হয়েছে।

বয়েল-সূত্র কার্যকরী হ'লে pV চাপের উপর নির্ভরশীল হয় না এবং সেক্ষেত্রে উল্লিখিত চিত্রের রেখাগুলি প্রতিটিই অনুভূমিক সরলরেখা হত। হাইড্রোজেন ও হিলিয়ামের ক্ষেত্রে সাধারণ উষ্ণতায় এই গুণফলের মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায়। আবার N_2, O_2, CO_2 প্রভৃতির ক্ষেত্রে 'pV' এর মান প্রথমে হ্রাসপ্রাপ্ত হ'য়ে এক সর্বনিম্ন মান লাভ করে এবং চাপের অধিকতর বৃদ্ধির সংগে ক্রমশঃ বর্ধিত হয়।

কামারলিং অনাস অতিনিম্ন উষ্ণতায় বিভিন্ন গ্যাসের উপর পরীক্ষার ফল থেকে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে নির্দিষ্ট উষ্ণতায়

$$pV = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \cdots \qquad 7.2.1$$

এই সমীকরণ দ্বারা গ্যাসের আচরণ নির্দেশিত করা যায়। এর মধ্যে A, B ইত্যাদি রাশিগুলি চাপনিরপেক্ষ হ'লেও উষ্ণতা নির্ভর এবং **ভিরিয়াল গুণাংক** (Virial coefficients) নামে পরিচিত। যেহেতু অতি অল্প চাপে সকল গ্যাসই আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করে, সুতরাং $A = \underset{p \to 0}{\mathrm{Lt}} \; pV = RT$।

B, অর্থাৎ দ্বিতীয় ভিরিয়াল গুণাংকের মান উষ্ণতার সংগে ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায়। নিম্ন উষ্ণতায় ঋণাত্মক মান থেকে বর্ধিত হ'য়ে যে উষ্ণতায় B এর মান শূন্য হয় সেই উষ্ণতাকে **বয়েল-উষ্ণতা** (Boyle-temp. বা Boyle point) বলে। এই উষ্ণতায় $\left[\dfrac{\partial(pV)}{\partial p}\; p \to 0\right]$ রাশির মান শূন্য হওয়ায় অতি অল্প চাপে বয়েল সূত্র কার্যকরী থাকে। অধিকতর উষ্ণতায় 'B' এর মান ধনাত্মক হয়।

তৃতীয় ভিরিয়াল গুণাংক, C, সর্বদাই ধনাত্মক থাকে। 7.2.1 সূত্র থেকে দেখা যাবে যে বয়েল উষ্ণতার উপরে কোন বাস্তব চাপেই $\left(\dfrac{\partial(pV)}{\partial p}\right)$ শূন্য হয় না। এর অর্থ এই যে বয়েল উষ্ণতার উপরে সকল গ্যাসের ক্ষেত্রেই 'pV' চাপের সংগে ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায় এবং ঐ উষ্ণতার নীচে 'pV' রাশির মান প্রথমে হ্রাসপ্রাপ্ত হ'য়ে পরে বর্ধিত হয়। সাধারণ উষ্ণতায় ($\simeq 300^\circ K$) হাইড্রোজেন (বয়েল উষ্ণতা বা $T_B = 104^\circ K$) বা হিলিয়াম ($T_B = 19^\circ K$) এই কারণে $N_2(T_B = 323^\circ K)$, $O_2(T_B = 423^\circ K)$ বা $O_2(T_B = 772^\circ K)$ থেকে বিভিন্নরূপ আচরণ করে।

৭.৩ ভ্যানডারওয়ালসের অবস্থা সমীকরণ

ইতিপূর্বে আলোচিত বিভিন্ন পরীক্ষার ফল থেকে সহজেই উপলব্ধি করা যায় যে আদর্শ গ্যাসের সূত্র থেকে বাস্তব গ্যাসের আচরণে প্রচুর পার্থক্য

বিদ্যমান। এই পার্থক্যের কারণ অণুর নির্দিষ্ট আয়তন ও পরস্পরের উপর প্রযুক্ত বল। উচ্চ উষ্ণতা ও অল্পচাপে এই দুই প্রভাব প্রকৃতপক্ষেই উপেক্ষণীয় হয়। অল্পচাপে গ্যাসের আপেক্ষিক আয়তন অধিক হয়, ফলে অণুগুলির নিজস্ব আয়তন গ্যাসের মোট আয়তনের তুলনায় অতি ক্ষুদ্র থাকে। অধিক উষ্ণতায় অণুগুলির গতীয় শক্তিও বর্ধিত হয় ফলে তারা সহজেই পারস্পরিক আকর্ষণী বলের প্রভাব অতিক্রম করতে পারে। কিন্তু অন্য অবস্থায় এই দুই প্রভাব কোনমতেই উপেক্ষা করা যায় না।

ভ্যানডার ওয়াল্‌স্ (Van der Waals, 1873) গ্যাস অণুর নির্দিষ্ট আয়তন এবং পারস্পরিক বলের প্রভাব বিচার ক'রে বাস্তবগ্যাসের নিম্নলিখিত অবস্থা সমীকরণ উপস্থাপিত করেন ঃ

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \qquad 7.3.1$$

এখানে p, V ও T যথাক্রমে গ্যাসের চাপ, গ্র্যাম-অণু গ্যাসের আয়তন ও নিরপেক্ষ উষ্ণতা, a ও b দুই ধ্রুবক ও R গ্যাস-ধ্রুবক। ভ্যানডার ওয়ালসের সমীকরণের যুক্তিগত প্রমাণ এই অংশে আলোচিত হ'ল।

ভ্যানডার ওয়াল্‌স্ অবস্থা সমীকরণের প্রমাণ ঃ

ভ্যানডার ওয়াল্‌স্ সমীকরণে (7.3.1) a ও b এই দুই ধ্রুবকের উৎপত্তি যথাক্রমে অণুর পারস্পরিক আকর্ষণ ও নির্দিষ্ট আয়তন থেকে। তৃতীয় অধ্যায়ের মত কল্পনা করা যাক কঠিন বর্তুলাকৃতি প্রতিটি অণুর ব্যাস σ। অন্তরণুক আকর্ষণী বল অতি স্বল্প পাল্লার এবং বর্তমানে আলোচনার জন্য কেবল এটুকুই স্বীকার করা প্রয়োজন যে আধারের পরিসরের সংগে তুলনীয় দূরত্বে এই আকর্ষণী বলের কোন প্রভাবই থাকে না। চাপ 'p' ও আয়তন 'V' এর উপর প্রযোজ্য শুদ্ধির এখন পৃথক বিশ্লেষণ করা যেতে পারে।

চাপ 'p' এর শুদ্ধি ঃ

যে সকল অণু গ্যাসের আয়তনের অভ্যন্তরে থাকে, সেগুলি চারিদিকের অন্যান্য অণুগুলির দ্বারা সমভাবে আকৃষ্ট হয়। ফলে তাদের উপর কোন লব্ধ (resultant) বল কাজ করে না। আয়তনের সীমানাস্থ অণুগুলির ক্ষেত্রে এ কথা খাটে না। এরূপ কোন অণুর কেবলমাত্র একপার্শ্বেই অন্যান্য অণু অবস্থিত থাকে, ফলে ঐ অণুর উপর মোট প্রযুক্ত বল অণুটিকে গ্যাসের ভিতর দিকে আকর্ষণ করে। অণুর পারস্পরিক আকর্ষণ স্বল্প-

পাল্লার হওয়াতে ঐ পাল্লার সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট ও অণুর সংগে সমকেন্দ্রিক এক অর্ধগোলকের মধ্যে যে সকল অণু অবস্থিত কেবল সেগুলির আকর্ষণই সীমানাস্থ অণুর উপর কার্য্যকরী হয়। এইপ্রকার অণুর সংখ্যা ঘনত্বসংখ্যা n এর সমানুপাতী। অপরপক্ষে গ্যাসের সীমানায় একক ক্ষেত্রফলে অবস্থিত অণুর সংখ্যাও n এর সমানুপাতী। অর্থাৎ সীমানার একক ক্ষেত্রফলে অবস্থিত অণুসমূহের উপর মোট প্রযুক্ত বল n^2 এর সমানুপাতী। এই বল এক অতিরিক্ত চাপের তুল্য। নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের ক্ষেত্রে $n \propto \frac{1}{V}$; সুতরাং এই অতিরিক্ত চাপকে $\frac{a}{V^2}$ লেখা যেতে পারে।

চাপের এই শুদ্ধির কারণ অন্যভাবেও অনুসন্ধান করা যায়। 2.5.7 সূত্রানুযায়ী $p = nkT = \frac{2}{3} n\epsilon$, $\epsilon =$ অণুর গড় গতীয় শক্তি। অন্তরণুক আকর্ষণের ফলে গ্যাসের অভ্যন্তরে অণুর স্থৈতিকশক্তি ঋণাত্মক থাকে। কোন অণু আধারের প্রাচীরে আঘাত করতে যখন গ্যাসের আয়তনের সীমানায় আসে এই স্থৈতিক শক্তি তখনও ঋণাত্মক থাকে তবে তুলনায় বৃদ্ধি পায় (অর্থাৎ শূন্যের আরও নিকটবর্তী হয়)। স্থৈতিক শক্তির এই বৃদ্ধি ঘনত্বসংখ্যার সমানুপাতী—ধরা যাক্ $n\epsilon'$ এর সমান। এই সংগে গতীয় শক্তি অবশ্যই সমপরিমাণে হ্রাস পাবে অর্থাৎ গড় গতীয় শক্তির মান হবে $\epsilon - n\epsilon'$। চাপের মানও পরিবর্তিত হ'য়ে $\frac{2}{3} n\epsilon$ এর স্থানে $\frac{2}{3} n(\epsilon - n\epsilon')$ হবে। এখন

$$nkT = \frac{2}{3} n\epsilon = p + \frac{2}{3} \epsilon' \,.\, n^2$$

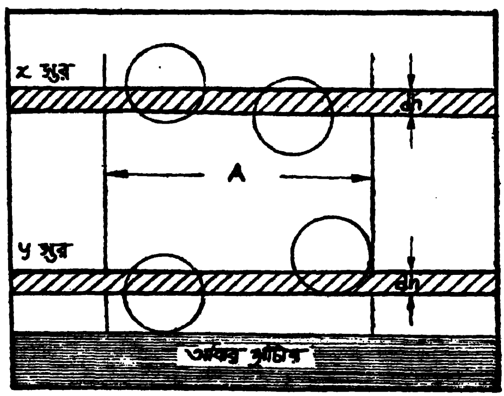
$\frac{2}{3} \epsilon' n^2$ কে পূর্বের মত $\frac{a}{V^2}$ লেখা যায়।

মোটের উপর অবস্থা সমীকরণে 'p' এর স্থানে '$p + \frac{a}{V^2}$' লেখাই যুক্তিযুক্ত ব'লে প্রমাণিত হয়। স্থৈতিক শক্তির উপর ঘনত্বসংখ্যার নির্ভরশীলতা এই বিশ্লেষণে উপেক্ষা করা হ'য়েছে। অন্যথায় দেখা যায় যে 'a' ধ্রুবক উষ্ণতা-নির্ভর হয়।

আয়তন 'V' এর শুদ্ধি

তৃতীয় অধ্যায়ে দেখা গেছে যে σ ব্যাসবিশিষ্ট প্রতিটি অণু σ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এক প্রভাবগোলক অধিকার ক'রে থাকে যার মধ্যে অন্য কোন অণুর কেন্দ্র অবস্থিত হ'তে পারে না। অণুর আয়তন v_0 হ'লে প্রভাবগোলকের আয়তন $8v_0$।

গ্যাস আধারের মধ্যে প্রাচীরের নিকটবর্তী কিছুটা অংশ ৭.৩ চিত্রে দেখানো হ'ল। আধারপ্রাচীরের সমান্তরাল অতিক্ষুদ্র বেধ dh এর দুইটি স্তর x ও y এর A ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কিছুটা অংশ কল্পনা করা যাক। ধরা যাক $dh << \sigma$ এবং $A >> \sigma^2$। x স্তর আধারের অভ্যন্তরে এবং y স্তর আধারপ্রাচীর থেকে $\frac{\sigma}{2}$ দূরত্বে অবস্থিত।



চিত্র ৭.৩

যদি মোট N সংখ্যক অণু V আয়তনে অবস্থিত হয় তবে অণুগুলি x স্তরে Adh আয়তনের মোট $Adh \cdot \frac{N}{V} \cdot 8v_0$ আয়তন অধিকার করে। মোট $(2\sigma + dh) \cdot A \cdot \frac{N}{V}$ সংখ্যক অণুর প্রভাবগোলকের কোন না কোন অংশ x স্তরের মধ্যে থাকবে। তার মধ্যে $\sigma \cdot A \cdot \frac{N}{V}$ সংখ্যক অণুর কেন্দ্র x স্তরের উপরে, সমসংখ্যক অণুর কেন্দ্র x স্তরের নীচে এবং $dh \cdot A \cdot \frac{N}{V}$ সংখ্যক অণুর কেন্দ্র x স্তরের মধ্যে থাকবে। শেষোক্ত সংখ্যা উপেক্ষণীয় কেননা $dh << \sigma$।

y স্তরের নিম্নে কোন অণুর কেন্দ্র অবস্থিত হ'তে পারে না। সুতরাং $(\sigma + dh) \cdot A \cdot \frac{N}{V}$ সংখ্যক অণু y স্তরের কিছু আয়তন অধিকার করে। σ এর তুলনায় dh কে উপেক্ষা ক'রে দেখা যায় এই সংখ্যা x স্তরের ক্ষেত্রে

প্রাপ্ত সংখ্যার অর্ধেক। y স্তরের অধিকৃত আয়তনও x স্তরের তুলনায় অর্ধেক, অর্থাৎ মোট $Adh \cdot \frac{N}{V} 4v_0$ হবে।

এখন যে কোনও একটি নির্দিষ্ট অণুর (M) x অথবা y স্তরে থাকার সম্ভাব্যতা বিবেচনা করা যাক।

$$\frac{M \text{ অণুর } x \text{ স্তরে থাকার সম্ভাব্যতা}}{M \text{ অণুর } y \text{ স্তরে থাকার সম্ভাব্যতা}} = \frac{x \text{ স্তরে অনধিকৃত আয়তন}}{y \text{ স্তরে অনধিকৃত আয়তন}}$$

$$= \frac{Adh - Adh\frac{N}{V} \cdot 8v_0}{Adh - Adh\frac{N}{V} \cdot 4v_0}$$

$$= 1 - \frac{N}{V} \cdot 4v_0 \quad (\because Nv_0 << V)$$

কিন্তু x ও y স্তরে অণুর ঘনত্বসংখ্যা n_x ও n_y এই দুই স্তরে M অণু থাকার সম্ভাব্যতার সংগে সমানুপাতী। সুতরাং

$$\frac{n_x}{n_y} = 1 - \frac{N}{V} 4v_0 \text{ ।}$$

এখন গ্যাসের আয়তনের প্রায় সকল অংশই x স্তরের অনুরূপ। সুতরাং $n_x = \frac{N}{V}$ । কিন্তু আধারের প্রাচীরে প্রদত্ত চাপ y স্তরের অণুগুলির সংঘর্ষের ফলেই উদ্ভূত হয়। সুতরাং এই চাপের প্রকৃত মান 2.4.1 সূত্রানুযায়ী

$$p = \tfrac{1}{3} m n_y \overline{c^2}$$

$$\frac{\tfrac{1}{3} m n_x \overline{c^2}}{1 - \frac{N}{V} \cdot 4v_0}$$

$$\tfrac{1}{3} m \cdot \frac{N}{V-b} \qquad (\because N = Vn_x)$$

এখানে $b = N \cdot 4v_0 =$ গ্যাসঅণুগুলির মোট আয়তনের চারগুণ। স্পষ্টই বোঝা যায় যে অণুর নির্দিষ্ট আয়তনের ফলে আধারের কার্যকরী আয়তন V এর পরিবর্তে $V - b$ হয়।

p ও V এর স্থলে উভয়ের সংশোধিত মান যথাক্রমে $p + \frac{a}{V^2}$ ও $V - b$

ব্যবহার করলে আদর্শ গ্যাসের অবস্থা সমীকরণ থেকে ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণ পাওয়া যায় :

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

n গ্র্যাম-অণু গ্যাসের ক্ষেত্রে এই সমীকরণের রূপ হয় :

$$\left(p+\frac{n^2a}{V^2}\right)\ (V-nb)=nRT \qquad 7.3.2$$

৭.৪ ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণের আলোচনা

ভ্যানডারওয়াল্‌স্‌ সমীকরণের লেখাঙ্কনের জন্য 'a' ও 'b' ধ্রুবকদ্বয়ের মান জানা প্রয়োজন। পরবর্তী অংশে বর্ণিত পরীক্ষাগত উপায়ে এই ধ্রুবকদ্বয়ের মান নির্ণয় করা যায়। CO_2 গ্যাসের ক্ষেত্রে $a=7{\cdot}18\times10^{-2}$ atmos . cm^6 ও $b=1{\cdot}9\times10^{-2}$cm^3 ব্যবহার ক'রে অঙ্কিত সমোষ্ণরেখার ৭.১ চিত্রে দেখানো হ'য়েছে। অ্যাণ্ড্রুজের পরীক্ষালব্ধ সমোষ্ণরেখার সংগে এগুলির তুলনা করলে দেখা যায় :

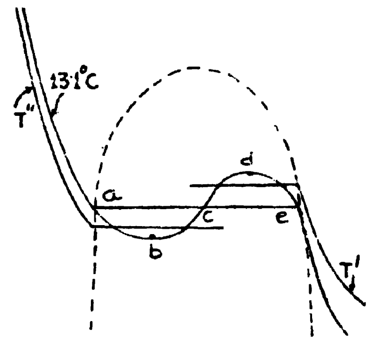
(ক) 31°C এর অধিক উষ্ণতায় সমোষ্ণরেখাগুলির আকৃতি মোটামুটিভাবে অ্যাণ্ড্রুজের পরীক্ষার সঙ্গে মেলে না।

(খ) 31°C অপেক্ষা কম উষ্ণতার ভ্যানডারওয়াল্‌স্‌ সমীকরণ থেকে অঙ্কিত সমোষ্ণরেখার আকৃতিও বিভিন্ন হয়। বাষ্পীভবন ও ঘনীভবনকালে অ্যাণ্ড্রুজের সমোষ্ণরেখায় যেমন এক অনুভূমিক ঋজু অংশ দেখা যায়, সেরূপ কোন অংশই এই সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় না।

তবে এই অসঙ্গতিগুলির কারণ অজ্ঞাত নয়। প্রথমতঃ 'a' ও 'b' ধ্রুবকদ্বয় উষ্ণতার উপর নির্ভরশীল হবে এরূপ আশা করা যায়। 'a' ধ্রুবকের এরূপ আচরণ চাপের শুদ্ধি নির্ণয়কালে প্রত্যাশিত হয়েছে। ৩.৩ অংশে অণুর ব্যাস উষ্ণতানির্ভর ব'লে ধরা হয়েছে, সুতরাং 'b' ধ্রুবকেরও উষ্ণতার উপর নির্ভরশীলতা আশা করা যায়। পরীক্ষা দ্বারাও a ও b ধ্রুবককে উষ্ণতার সংগে পরিবর্তিত হ'তে দেখা গেছে। মোটের উপর a ও b এর একপ্রস্থ নির্দিষ্ট মান ব্যবহার ক'রে সকল উষ্ণতায় সমোষ্ণরেখার অবস্থান নির্ভুলভাবে নির্ণয় করা সম্ভব হ'তে পারে না।

দ্বিতীয়তঃ, সন্ধিউষ্ণতা অপেক্ষা কম উষ্ণতায় (13·1°C) ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণ থেকে অঙ্কিত সমোষ্ণরেখার মধ্যে (চিত্র ৭.৪) bd অংশের মত এমন এক অংশ পাওয়া যায় যেখানে $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ এর মান ধনাত্মক।

এরূপ অংশ পরীক্ষা দ্বারা লভ্য নয়। কেননা এরূপ অবস্থায় পরীক্ষাধীন পদার্থের উপর চাপ সামান্য বর্ধিত হ'লে আয়তন আরও বর্ধিত হওয়ার চেষ্টা করে। নির্দিষ্ট আয়তনের আধারের মধ্যে যেহেতু আয়তন যথেচ্ছভাবে বাড়তে



চিত্র ৭.৪

পারে না, অতএব চাপ এইভাবে উত্তরোত্তর বাড়তে পারে। অপরপক্ষে চাপ সামান্য হ্রাস পেলে আয়তনের সঙ্কোচন হেতু চাপ উত্তরোত্তর কমতে থাকে। স্পষ্টতঃই *bd* অংশ পদার্থের এক স্থিতিশীলতাহীন (unstable) অবস্থা সূচিত করে এবং কোন পরীক্ষায় পদার্থকে এই অবস্থায় রাখা যায় না।

ধরা যাক *ace* সরলরেখা একই উষ্ণতায় পরীক্ষা দ্বারা লব্ধ সমোষ্ণরেখার অনুভূমিক অংশ। *de* গ্যাসীয় অবস্থারই বর্ধিতাংশ। 13·1°C উষ্ণতায় অঙ্কিত সমোষ্ণরেখার উপর অবস্থিত হ'লেও এর প্রতিটি বিন্দুই কোন উচ্চতর উষ্ণতায় (T') পরীক্ষালভ্য সমোষ্ণরেখার উপর পড়ে। সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় উষ্ণতা অপেক্ষা এই অংশে উষ্ণতা কম। এই অবস্থাকে অতি-শীতায়িত বাষ্প (supercooled vapour) বলা হয়। অনুরূপভাবে দেখা যায় যে *ab* অংশ দ্বারা সূচিত অবস্থা 13·1°C অপেক্ষা অল্প কোন উষ্ণতার (T'') তরলের সাম্যাবস্থা হ'তে পারে। তাই এই অবস্থাকে অতিতাপিত তরল (superheated liquid) বলা হয়। দুই অবস্থার কোনটিই স্থিতিশীল নয় এবং সেই হেতু অল্পক্ষণের জন্যই পদার্থকে এরূপ অবস্থায় রাখা যায়।

অপরপক্ষে *ac* সরলরেখা তরল ও বাষ্পের মিশ্রণকে সূচিত করে। এই দুই অবস্থায় আপেক্ষিক আয়তনের মান বিভিন্ন হওয়ায় মিশ্রণটি স্থিতিশীল অবস্থায় থাকে, কেননা তরল ও বাষ্পের অনুপাত পরিবর্তিত হ'য়ে আয়তনের হ্রাসবৃদ্ধি ঘটলেও চাপ অপরিবর্তিত রাখে।

ae সরলরেখার অবস্থান, অর্থাৎ তরলের লীনতাপশোষণ ও বাষ্পীভবনের কালে চাপের মান তরল ও বাষ্পের "লভ্যশক্তি"র (Helmholtz's Free Energy, F) উপর নির্ভর করে। *ae* সরলরেখা বরাবর পদার্থের প্রসারণ সমান উষ্ণতা ও চাপে সংঘটিত হয়। এরূপ প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে

$$\int_a^e dF = -\int_a^e pdV, \quad \text{অথবা} \quad F_a - F_e = p(V_e - V_a)\text{।}$$

শেষোক্ত সমীকরণই *ae* সরলরেখার অবস্থান নির্দেশ করে।

৭.৫ পরীক্ষাদ্বারা 'a' ও 'b' ধ্রুবকদ্বয়ের মান নির্ণয়

(i) সমোষ্ণরেখার সাহায্যে ঃ

পরীক্ষালব্ধ সমোষ্ণরেখার থেকে নির্দিষ্ট উষ্ণতায় (নিরপেক্ষ তাপমাত্রায় T) p, V ও $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ এর মান জানা যায়। 7.3.1 সূত্র থেকে

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \qquad 7.5.1$$

$$\text{ও} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2}\text{।} \qquad 7.5.2$$

সমীকরণদ্বয় থেকে 'a' ও 'b' এর মান পাওয়া যায়। এই প্রকারে লব্ধ মান নির্দিষ্ট উষ্ণতাতেই প্রযোজ্য।

(ii) গ্যাসের চাপ ও আয়তনের প্রসারণ-গুণাঙ্ক (Coefficient of expansion) থেকে ঃ

চাপ ও আয়তনের প্রসারণ-গুণাংকের সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$\text{চাপের প্রসারণ-গুণাঙ্ক, } \beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

$$\text{ও আয়তনের প্রসারণ-গুণাঙ্ক, } \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণ প্রতিপালনকারী গ্যাসের ক্ষেত্রে 7.5.1 সূত্র থেকে

$$p\beta = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{V-b} = \frac{1}{T}\left(p + \frac{a}{V^2}\right)$$

$$\text{সুতরাং } a = pV^2(\beta T - 1) \qquad 7.5.3$$

আবার স্থির চাপে, 7.3.1 থেকে অন্তরকলনের সাহায্যে

$$RdT = \left(p + \frac{a}{V^2}\right)dV - (V-b)\frac{2a}{V^3}dV$$

$$= \left(p - \frac{a}{V^2}\right)dV \text{ ।} \quad \left(\frac{ab}{V^3} \text{ রাশিকে উপেক্ষা ক'রে}\right)$$

পুনরায় 7.3.1 সূত্রের সাহায্যে

$$\frac{\left(p - \frac{a}{V^2}\right)}{\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)}dV = \frac{dT}{T}$$

সুতরাং $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T} \quad \frac{\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)}{V\left(p - \frac{a}{V^2}\right)}$

যেহেতু $\frac{a}{V^2} << p$ এবং $b << V$, দ্বিপদ (binomial) সূত্রের সাহায্যে 'α' কে লেখা যায় ঃ

$$\alpha = \frac{1}{T}\left(1 + \frac{2a}{pV^2} - \frac{b}{V}\right)$$

সুতরাং $\quad b = V\left(1 - \alpha T + \frac{2a}{pV^2}\right) \qquad$ 7.5.4

এখন 'a' ধ্রুবকের মান 7.5.3 সূত্রের সাহায্যে জানা যেতে পারে। 'b' ধ্রুবকের মান $p\beta = R/(V-b)$ সম্পর্ক থেকেও নির্ণয় করা যেতে পারে আবার 'a' এর মান জানা থাকলে 7.5.4 সূত্রের থেকেও বার করা যেতে পারে।

লক্ষ্যণীয় যে 7.5.3 ও 7.5.4 সূত্র ব্যবহার করতে হলে $(1-\alpha T)$ ও $(\beta T - 1)$ এর মান জানা দরকার। বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রেও 'αT' ও 'βT' এর মান 1 এর খুবই নিকটবর্তী, সুতরাং 'α' ও 'β' এর মান এখানে অত্যন্ত সূক্ষ্ম-ভাবে নিরূপিত হওয়া প্রয়োজন।

(*iii*) **সন্ধিধ্রুবক (Critical constants) গুলির সাহায্যে ঃ**

পরবর্তী ৭.৬ অংশে সন্ধিধ্রুবক p_c, V_c ও T_c এর তাত্ত্বিক মান নির্ণীত হবে। এগুলির যে কোনও দুইটির মান থেকেই 'a' ও 'b' এর মান জানা

যায়। তবে সন্ধি আয়তনের সূক্ষ্ম পরিমাপ অপেক্ষাকৃত কঠিন হওয়ায় p_c ও T_c এর মান ব্যবহারই যুক্তিযুক্ত। সহজেই দেখানো যায় যে

$$a = \frac{27}{64} \cdot R^2 T_c$$

$$b = \frac{RT_c}{8p_c} \qquad 7.5.5$$

এই পদ্ধতির সুবিধা এই যে 'a' ও 'b' এর মান দুইটি অপেক্ষাকৃত বৃহৎ রাশির বিয়োগফল হিসাবে নির্ণীত হয় না। কিন্তু এই উপায়ে নির্ণীত মান কেবলমাত্র সন্ধিবিন্দুর অঞ্চলেই খাটে, অল্প ঘনত্ববিশিষ্ট অবস্থায় ধ্রুবকদ্বয়ের একই মান আশা করা যায় না। ৭.১ সারণীতে সন্ধিধ্রুবকের সাহায্যে কয়েকটি গ্যাসের ক্ষেত্রে 'a' ও 'b' এর মান নির্ণীত হ'ল।

(*iv*) **জুল-কেলভিন অভিক্রিয়ায় পরিদৃষ্ট বিপর্যয় উষ্ণতা** (inversion temperature) **থেকে:**

জুল-কেলভিন অভিক্রিয়ায় এক নির্দিষ্ট উষ্ণতার নীচে গ্যাসের প্রসারণ বা চাপের হ্রাসের সংগে উষ্ণতার হ্রাস ঘটে। এই উষ্ণতার উপরে একই অবস্থায় গ্যাসের উষ্ণতা আরও বৃদ্ধি পায়। এই উষ্ণতাকে বিপর্যয় উষ্ণতা, T_i, বলে। ভ্যানডার ওয়াল্‌স্ সমীকরণ অনুযায়ী

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} RT_i \qquad 7.5.6$$

এই সূত্রের সাহায্যে 'a' ও 'b' এর একটি জানা থাকলে T_i এর মান ব্যবহার ক'রে অপরটি জানা যেতে পারে।

গ্যাস	T_c (°K)	p_c (10^6 dyne/cm^2)	V_c গ্র্যাম-অণুক (cm^3)	a গ্র্যাম-অণুক (10^{10} dyne. cm^4)	b গ্র্যাম-অণুক (cm^3)	$\frac{RT_c}{p_c V_c}$
He	5·2	2·29	58	3·44	23·6	3·26
H_2	32·99	12·94	65·5	24·5	26·5	3·24
A	150·7	48·6	75·2	136	32·2	3·42
O_2	154·8	50·8	78	138	31·7	3·25
N_2	126·2	33·9	90·1	137	38·7	3·44
CO_2	304·2	73·8	94·0	366	42·8	3·65
NH_3	405·4	113	72·5	424	37·3	4·12
H_2O	647	221	59·1	552	30·4	4·12

৭.১ সারণী—'a', 'b' ও $\frac{RT_c}{p_c V_c}$ এর মান

৭.৬ ভ্যানডার ওয়ালস্ সমীকরণ অনুযায়ী সন্ধি-ধ্রুবক সমূহের মান

পদার্থের সন্ধি-ধ্রুবক সমূহের (T_c, p_c ও V_c) মান ভ্যানডার ওয়ালস্ সমীকরণে ব্যবহৃত ধ্রুবক 'a' ও 'b' এর দ্বারা নির্দেশ করা যায়। সমোষ্ণ-রেখাগুলির উপর স্পর্শক যেখানে অনুভূমিক সেখানে $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$

অথবা 7.5.2 থেকে $$\frac{RT}{V-b} = \frac{2a(V-b)}{V^3} \qquad 7.6.1$$

7.5.1 ও 7.6.1 থেকে T কে অপনীত (eliminate) করলে পাওয়া যায়

$$p = \frac{a}{V^2}\left(1 - \frac{2b}{V}\right) \qquad 7.6.2$$

যে সকল বিন্দুতে সমোষ্ণরেখাগুলির স্পর্শক অনুভূমিক হয় সেগুলি 7.6.2 সমীকরণ দ্বারা সূচিত রেখার উপর অবস্থিত হবে। ৭.১ চিত্রে এই রেখা বিন্দু দ্বারা অঙ্কিত হয়েছে। সন্ধিবিন্দু এই রেখার সর্বোচ্চ বিন্দু সুতরাং এই বিন্দুতে রেখাটির $\frac{dp}{dV}$ এর মান শূন্য।

অর্থাৎ সন্ধিবিন্দুতে $$\frac{d}{dV}\left[\frac{a}{V^2}\left(1 - \frac{2b}{V}\right)\right]_{V=V_c} = 0$$

$$\text{বা} \quad V_c = 3b \qquad 7.6.3a$$

7.6.2 সূত্র থেকে পাওয়া যায় $p_c = \frac{a}{27b^2}$। $\qquad$ 7.6.3b

যেহেতু $T = T_c$, $V = V_c$ 7.6.1 সূত্রকে সম্মত করে

$$\therefore \quad T_c = \frac{8a}{27Rb} \qquad 7.6.3c$$

7.6.3 সূত্রগুলি থেকে ঘাতবিহীন রাশি $\eta = \frac{RT_c}{p_cV_c}$ এর মান পাওয়া যায় $\frac{8}{3}$ বা 2·667। এই রাশি সন্ধি গুণাঙ্ক (critical coefficient) নামে পরিচিত এবং বিভিন্ন অবস্থা সমীকরণের সার্থকতা নির্ধারণে এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ সংখ্যা। বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে এই রাশির পরীক্ষালব্ধ মান ৭.১ সারণীতে দেখানো

হ'য়েছে। পরীক্ষালব্ধ মানগুলি স্পষ্টই $\frac{8}{3}$ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং গ্যাসের আণবিক গঠনের উপর নির্ভরশীল।*

ভ্যানডার ওয়াল্‌স্ সমীকরণ থেকে বয়েল উষ্ণতার মানও সন্ধি-উষ্ণতার মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। যেহেতু এই সমীকরণকে $V=f(p)$ আকারে লেখা যায় না, অতএব এক্ষেত্রে PV কে $\frac{1}{V}$ এর ঘাতশ্রেণী (power series) হিসাবে লেখা যাক :

$$pV=\frac{RTV}{V-b}-\frac{a}{V}=RT+(bRT-a)\left(\frac{1}{V}\right)+b^2RT\left(\frac{1}{V}\right)^2+\cdots$$

অথবা $\left(\because \frac{1}{V}\approx\frac{p}{RT}\right)$

$$pV=RT+\frac{bRT-a}{RT}\cdot p+\cdots\cdots$$

বয়েল উষ্ণতায় p এর সহগ শূন্য হয়, সুতরাং বয়েল উষ্ণতা

$$\text{বা}\quad T_B=\frac{a}{bR}=\frac{27}{8}T_C \qquad 7.6.4$$

$\frac{T_B}{T_C}$ এর প্রত্যাশিত মান $\frac{27}{8}$ বা 3·375। কিন্তু পরীক্ষালব্ধ মান বেশীর ভাগ ক্ষেত্রেই 2·7 থেকে 3·2 এর মধ্যে থাকে, উপরন্তু এই রাশিকে মোটেই ধ্রুব বলা চলে না। অর্থাৎ এক্ষেত্রেও ভ্যানডার ওয়াল্‌স্ সমীকরণের সাফল্য সন্তোষজনক বলা চলে না।

৭.৭ ক্লসিয়াসের ভিরিয়াল উপপাদ্য

কোন গ্যাস এক বৃহৎসংখ্যক বস্তুকণিকার সমষ্টিমাত্র। ক্লসিয়াস এই কণিকাগুলির উপর সাধারণ বলবিদ্যার প্রয়োগের দ্বারা 'ভিরিয়াল উপপাদ্য' প্রমাণ করেন। প্রথমে এই উপপাদ্যের প্রমাণ আলোচনা করা যাক।

ধরা যাক m ভরবিশিষ্ট কোন গ্যাস অণুর অবস্থান নির্দেশক ভেক্টর $\vec{r}$ এবং তার উপর মোট কার্য্যকরী বল $\vec{F}$। নিউটনের গতিসূত্র অনুসারে

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$$

* অন্যভাবে বলা যায় যে V_c এর প্রত্যাশিত মান যেখানে $3b$, পরীক্ষালব্ধ মান সেখানে $b\left(=\frac{RT_c}{8p_c}\right)$ এর প্রায় 2-2.5 গুণ।

এখন $\frac{d^2}{dt^2}(r^2)=\frac{d}{dt}(2\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})=2(\dot{\vec{r}})^2+2\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}}$

অর্থাৎ $\frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2=\frac{m}{4}\frac{d^2}{dt^2}(r^2)-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{F}$ 7.7.1

এই সূত্র প্রতিটি গ্যাস অণুর ক্ষেত্রে সর্বদাই প্রযোজ্য। সুতরাং গ্যাসের সমস্ত অণুর জন্য এই সূত্রের উভয় দিকের যোগফল এবং দীর্ঘ সময়ের জন্য গড় মান ব্যবহার করলে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{2}\sum\overline{mc^2}=\frac{1}{4}\sum\overline{m\frac{d^2}{dt^2}(r^2)}-\frac{1}{2}\sum\overline{\vec{r}\cdot\vec{F}}\quad(\vec{c}=\dot{\vec{r}}) \qquad 7.7.2$$

কিন্তু t সময়ের জন্য গড় মান

$$\sum\overline{m\frac{d^2}{dt^2}(r^2)}=\sum\frac{m}{t}\int\frac{d^2}{dt^2}(r^2)\,dt$$

$$=\sum\frac{m}{t}\left[\frac{d}{dt}(r^2)\right]_0^t$$

$$=\sum\frac{2m}{t}\left[\vec{r}\cdot\vec{c}\right]$$

$$=0$$

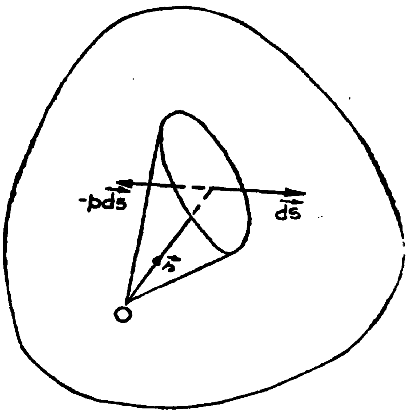
কেননা $\vec{r}\cdot\vec{c}$ স্কেলার গুণফলের মান ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয়ই হ'তে পারে এবং বৃহৎ সংখ্যক অণুর ক্ষেত্রে আলোচ্য যোগফলের মান সর্বদাই শূন্য হবে। সুতরাং 7.7.2 থেকে

$$\frac{1}{2}\sum\overline{mc^2}=-\frac{1}{2}\sum r\cdot F$$

এই সূত্রে বামদিকের রাশি গ্যাসের অণুর মোট গতীয় শক্তি। ডানদিকের রাশিটিকে গ্যাসের ভিরিয়াল বলা হয়। বিশেষ অবস্থায় এই ভিরিয়ালের মান নির্ণয় করলেই গ্যাসের অবস্থা-সমীকরণ পাওয়া যায়। 7.7.3 সূত্রকেই **"ভিরিয়াল উপপাদ্য"** (Virial Theorem) বলা হয়।

৭.৮ ভিরিয়াল উপপাদ্যের প্রয়োগ

কোন গ্যাসের ক্ষেত্রে ভিরিয়াল উপপাদ্য প্রয়োগ করা যাক। ধরা যাক গ্যাস আধারের প্রাচীর গ্যাসের উপর p চাপ প্রয়োগ করে। প্রাচীরের ds ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট অংশ যে বল প্রয়োগ করে তার ভেক্টর মান $-p\,\vec{ds}$ (এখানে $\vec{ds}$ ভেক্টরের মান ds ও দিক ds তলের উপর বহির্মুখী লম্বের মত ; চিত্র ৭.৫)। এই প্রকার বল থেকে উদ্ভূত ভিরিয়ালের মান



চিত্র ৭.৫

$$W_1 = -\tfrac{1}{2}\int \vec{r}\cdot(-p\,\vec{ds})$$

$$=\frac{p}{2}\int \vec{r}\cdot\vec{ds}$$

$$=\frac{3}{2}pV \qquad (\,V = \text{গ্যাসের আয়তন}\,) \qquad 7.8.1$$

কেননা $\frac{1}{3}\vec{r}\,.\,\vec{ds} = ds$ ভূমি ও 0 শীর্ষবিশিষ্ট শঙ্কুর ঘনফল।

গ্যাস-অণুগুলি সংঘর্ষের সময় পরস্পরের উপর যে বল প্রয়োগ করে তার জন্য ভিরিয়ালের তারতম্য ঘটে না। যদি i- ও j-তম দুই অণু পরস্পরের উপর যথাক্রমে $\vec{F}_{ij}$ ও $\vec{F}_{ji}$ এই দুই বল প্রয়োগ করে তবে $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ হয়। সংঘর্ষ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ হ'লে ভিরিয়ালে যোজনীয় রাশি

$$W_2 = -\frac{1}{2}\sum(\vec{r}\cdot\vec{F}_{ij}+\vec{r}\cdot\vec{F}_{ji}) = 0 \qquad 7.8.2$$

অবশ্য পরস্পর থেকে দূরবর্তী দুই অণুর মধ্যে আকর্ষণ বা বিকর্ষণ থাকলে অনুরূপ ফল পাওয়া যায় না। ধরা যাক্ দুই অণুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_i}$ ও $\vec{r_j}$, তাদের মধ্যে দূরত্ব $\vec{r_i} - \vec{r_j} = \vec{r_{ij}}$ এবং পরস্পরের উপর প্রযুক্ত বল $\vec{f_{ij}}$ ও $\vec{f_{ji}}$ $(= -\vec{f_{ij}})$। এক্ষেত্রে ভিরিয়ালে যোজনীয় রাশি

$$W_s = -\frac{1}{2}\sum(\vec{r_i} \cdot \vec{f_{ij}} + \vec{r_j} \cdot \vec{f_{ji}})$$

$$= -\frac{1}{2}\sum \vec{r_{ij}} \cdot \vec{f_{ij}} \qquad 7.8.3$$

দুই অণুর মধ্যে কার্য্যকরী বল যদি কেন্দ্রগ (central) এবং কেবলমাত্র অণুদ্বয়ের মধ্যস্থ দূরত্বের উপর নির্ভরশীল হয় তবে

$$W_s = -\frac{1}{2}\sum r_{ij} f(r_{ij})$$

এখানে $f(r_{ij})$ 'r_{ij}' এর উপর নির্ভরশীল স্কেলার রাশি। গ্যাসের মোট N-সংখ্যক অণুর প্রতিটির ভর m হ'লে 7.7.3 সূত্র অর্থাৎ ভিরিয়াল উপপাদ্য থেকে ঃ

$$\frac{1}{2}\Sigma m\overline{c^2} = \frac{3}{2}pV - \frac{1}{2}\Sigma r_{ij} f(r_{ij})$$

অথবা
$$pV = \frac{1}{3}mN\overline{c^2} + \frac{1}{3}\Sigma r_{ij} f(r_{ij})$$

$$= NkT + \frac{1}{3}\Sigma r_{ij} f(r_{ij}) \qquad 7.8.4$$

যোগফলের মধ্যে এ ক্ষেত্রে অণুর প্রতি যুগ্মকে বিবেচনা করতে হবে। যখন $r_{ij} = 0$, অর্থাৎ অণুগুলি যখন পরস্পর স্পর্শকারী বিন্দুভর, তখন উক্ত যোগফলের মান শূন্য হয়। এমন কি যখন $r_{ij} \neq 0$, তখন যদি $f(r_{ij}) = 0$ হয় অর্থাৎ দুই অণুর মধ্যে সংঘর্ষ ব্যতীত অন্য ক্ষেত্রে কোনও প্রকার বল না থাকে তবে সে ক্ষেত্রেও উক্ত যোগফল শূন্য হয়। এবং এই দুই অবস্থাতেই 7.8.4 সূত্র থেকে আদর্শ গ্যাসের অবস্থা সমীকরণ $pV = NkT$ পাওয়া যায়। বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে যদি $f(r_{ij})$ এর মান জানা যায় তবে 7.8.4 সূত্রের সাহায্যে সহজেই বাস্তব গ্যাসের অবস্থা সমীকরণ নির্ণয় করা যেতে পারে। কিন্তু বল f এর মান বাস্তবক্ষেত্রে সঠিক জানা যায় না। এই বল অণুর স্থৈতিক শক্তি থেকে জাত, অর্থাৎ $f(r) = -\dfrac{\partial E(r)}{\partial r}$ এরূপ ধরা যেতে পারে। ম্যাক্সওয়েল-

বোল্‌ৎস্‌মান সূত্র অনুযায়ী গ্যাসের মধ্যে স্থৈতিক শক্তিহীন অঞ্চলে অণুর ঘনত্ব-সংখ্যা n_0 হ'লে কোন অণুর কেন্দ্র থেকে r দূরত্বে অন্যান্য অণুর ঘনত্বসংখ্যা হয়

$$n_r = n_0 e^{-E(r)/kT} \qquad 7.8.5$$

কোন নির্দিষ্ট অণু এবং ঐ অণু থেকে r ও $r+dr$ এর মধ্যবর্তী দূরত্বে অবস্থিত $4\pi r^2\, dr \cdot n_r$ সংখ্যক অণু সমসংখ্যক যুগ্ম রচনা করে। 7.8.4 সূত্রের $\Sigma r_{ij} f(r_{ij})$ যোগফলে এই যুগ্মগুলির দ্বারা মোট যুক্ত রাশি $4\pi r^2\, dr \cdot n_r \cdot r \cdot -\frac{\partial E(r)}{\partial r}$। মোট N সংখ্যক অণুর জন্য $\Sigma r_{ij} f(r_{ij})$ যোগফলের মান

$$\frac{1}{2} N \int^{\infty} 4\pi r^2\, dr \cdot n_r \cdot r \cdot -\frac{\partial E(r)}{\partial r}$$

($\frac{1}{2}$ উৎপাদকটি যোগ করার কারণ এই যে আমাদের হিসাবে প্রতি অনুযুগ্ম দুইবার পরিগণিত হয়, ফলে যোগফলের মানও দ্বিগুণ দাঁড়ায়।)

$$= \frac{2\pi N^2}{V} \int_{r=0}^{\infty} - r^3 \frac{\partial E(r)}{\partial r} e^{-\frac{E(r)}{kT}}\, dr$$

এখানে $n_0 = \frac{N}{V}$ ধরা হ'য়েছে। প্রকৃতপক্ষে n_r এর গড় মানই $\frac{N}{V}$এর সমান। তবে $E(r) << kT$ হ'লে $\frac{N}{V}$ কে n_0 এর আসন্ন মান ধরা যেতে পারে। 7.8.4 সূত্রে এখন ফিরে যাওয়া যাক।

$$pV = NkT - \frac{2\pi N^2}{3V} \int^{\infty} r^3 \cdot \frac{\partial E(r)}{\partial r} e^{-\frac{E(r)}{kT}}\, dr$$

$$= NkT + \frac{2\pi N^2}{3V} \left[\left\{ r^3 \left(kT\, e^{-\frac{E(r)}{kT}} + c \right) \right\}_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 3r^2 \left(kT\, e^{-\frac{E(r)}{kT}} + c \right) dr \right]$$

(আংশিক সমাকলন দ্বারা)। এখানে c সমাকলন ধ্রুবক। c এর মান এরূপ হওয়া প্রয়োজন যেন $r \to \infty$ সীমায় pV র মান অসীম না হয়। যখন $r \to \infty$, $E(r) \to 0$ অথবা

$$r^3(kTe^{-E(r)/kT} + c) \to r^3(kT + c)$$

এই রাশির মান সসীম হ'তে হ'লে $c = -kT$ হওয়া প্রয়োজন। c এর এই মান ব্যবহার করে পাওয়া যাবে

$$pV = NkT + \frac{2\pi N^2 kT}{V} \int_0^\infty r^2 \left(1 - e^{-\frac{E(r)}{kT}}\right) dr \qquad 7.8.6$$

কেননা $r^3\left(e^{-\frac{E(r)}{kT}} - 1\right)$ এর মান $r = 0$ ও $r = \infty$ দুই সীমাতেই শূন্য। 7.8.6 সূত্র থেকে গ্যাসের অবস্থা সমীকরণ পেতে হ'লে $E(r)$ সম্বন্ধে কিছু ধারণা প্রয়োজন।

দুই অণু যখন অল্প দূরত্বে থাকে তখন উভয়ের মধ্যে এক স্বল্পপাল্লার দুর্বল আকর্ষণ কাজ করে। অণুদ্বয় যখন নিকটবর্তী হয় এবং তাদের ইলেকট্রন-মেঘ যখন পরস্পরকে স্পর্শ করে তখন উভয়ের মধ্যে এক প্রবল বিকর্ষণ দেখা দেয়। স্থৈতিক শক্তি $E(r)$ এর হিসাবে—

যদি $r > \sigma$ হয় তবে $E(r)$ এর মান অল্প ও ঋণাত্মক

যদি $r < \sigma$ হয় তবে $E(r) = \infty$ (σ = অণুর ব্যাস)

7.8.6 সূত্রের সমাকলনের মান এই সর্তানুযায়ী

$$\int_0^\sigma r^2 dr + \int_\sigma^\infty r^2 \cdot \frac{E(r)}{kT}\, dr = \frac{\sigma^3}{3} - \frac{I}{kT},$$

$$\text{এখানে } I = -\int_\sigma^\infty r^2 E(r) dr, \quad \text{ধনাত্মক রাশি।}$$

এখন 7.8.6 সূত্র থেকে

$$pV = NkT + \frac{2\pi N^2 kT}{V}\left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{I}{kT}\right) \qquad 7.8.7$$

এক গ্র্যাম-অণু গ্যাসের ক্ষেত্রে $N = N_0$ (আভোগাড্রো-সংখ্যা) এবং

$$pV = RT + \frac{RT}{V}\left(b - \frac{a}{RT}\right) \qquad 7.8.8$$

এখানে $b = \frac{2}{3}\pi N_0 \sigma^3$ ও $a = 2\pi N_0{}^2 I$। লক্ষণীয় যে b এর মান N_0-সংখ্যক অণুর মোট নিজস্ব আয়তনের চারগুণ এবং ধনাত্মক রাশি।

7.8.8 সূত্র ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণের সমার্থক। এই সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$pV + \frac{a}{V} = RT\left(1 + \frac{b}{V}\right)$$

অথবা $$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

কেননা সাধারণভাবে $b << V$ হওয়ায় $\left(1 + \frac{b}{V}\right)^{-1} = 1 - \frac{b}{V}$।

পূর্বের গণনায় $E(r)$ এর যেরূপ মান ব্যবহার করা হয়েছে তা কঠিন গোলকের মত অণুর ক্ষেত্রেই খাটে। সুতরাং স্বাভাবিকভাবেই ভিরিয়াল উপপাদ্য থেকে ভ্যানডার ওয়াল্‌সের সমীকরণ পাওয়া গেছে। যদি $E(r)$ এর মান আরও বিশদ্‌ভাবে জানা যায় তবে তার সাহায্যে ভিরিয়াল উপপাদ্য থেকে আরও নির্ভুল অবস্থা সমীকরণ পাওয়া সম্ভব হবে। এই কারণেই ভিরিয়াল উপপাদ্যের প্রকৃত গুরুত্ব।

৭.৯ সন্ধিধ্রুবকের সাহায্যে অবস্থা সমীকরণের সংক্ষেপণ

7.6.3 সূত্রসমূহে লব্ধ সন্ধিধ্রুবকগুলির মান ব্যবহার ক'রে ভ্যানডারওয়াল্‌স্‌ সমীকরণকে নিম্নের মত লেখা যায়ঃ

$$\left(p_r + \frac{3}{V_r{}^2}\right)\left(V_r - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{8}{3}T_r \qquad 7.9.1$$

এখানে $p_r = \frac{p}{p_c}$, $V_r = \frac{V}{V_c}$ ও $T_r = \frac{T}{T_c}$। এই সমীকরণকে ভ্যানডার-ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণের সংক্ষিপ্ত (reduced) রূপ বলা যায়। 7.9.1 সমীকরণে এমন কোন ধ্রুবক নেই যার এক এক পদার্থের জন্য এক এক মান ব্যবহার করা প্রয়োজন। সন্ধি-ধ্রুবকত্রয়ের মান জানা থাকলে এই সমীকরণ যে কোনও পদার্থের ক্ষেত্রেই ব্যবহার করা যায়। এই কারণে বিশেষ অবস্থায় দুইটি পদার্থের ক্ষেত্রে p_r, V_r, T_r এই তিনটি চলরাশির যে কোনও দুইটি যদি এক হয় তবে তৃতীয় চলরাশিটিও এক হবে। এই নিয়মকে 'তুল্যাবস্থার নিয়ম' (Law of Corresponding States) বলে।

বাস্তবক্ষেত্রে এই নিয়ম খাটে না। বিভিন্ন পদার্থের অণুর গঠন এবং সেইহেতু তাদের পারস্পরিক আকর্ষণের প্রকৃতি ও সমোষ্ণরেখার আকৃতি

বিভিন্ন। কেবলমাত্র অক্ষের সঙ্কোচন বা প্রসারণ দ্বারা বিভিন্ন পদার্থের সমোষ্ণরেখাগুলিকে সমস্থানিক (coincident) করা যায় না।

৭.১০ অন্যান্য অবস্থা সমীকরণ

বাস্তব গ্যাসের আচরণ ভ্যানডার ওয়াল্‌স্ সমীকরণ অপেক্ষা আরও সঠিকভাবে নির্দেশিত করার জন্য বহুসংখ্যক অবস্থা সমীকরণ প্রস্তাবিত হ'য়েছে। এগুলির কোনটির তত্ত্বগত যৌক্তিকতা বর্তমান, কোনটি সম্পূর্ণ প্রায়োগিক (empirical)। এরূপ কয়েকটি সমীকরণ এখানে আলোচিত হ'ল।

(*i*) বার্থেলটের (Berthelot) সমীকরণ :

ভ্যানডারওয়াল্‌স্ সমীকরণের ধ্রুবক 'a' এর পরিবর্তে $\frac{'a'}{T}$ ব্যবহার করে এই সমীকরণ পাওয়া যায় :

$$\left(p+\frac{a}{V^2T}\right)(V-b)=RT \qquad 7.10.1$$

ভ্যানডারওয়াল্‌সের 'a' ধ্রুবকের উষ্ণতানির্ভরতা পূর্বেই অনুমিত হয়েছে, সুতরাং এক্ষেত্রে $\frac{'a'}{T}$ এর ব্যবহার সম্পূর্ণ অযৌক্তিক নয়। সন্ধিবিন্দুর সমীপবর্তী অঞ্চলে এই সমীকরণ ভ্যানডারওয়াল্‌স্ সমীকরণের মতই অপ্রযোজ্য। অপেক্ষাকৃত অল্প চাপে এই সমীকরণ ভ্যানডার ওয়াল্‌স্ সমীকরণ অপেক্ষা ভাল কাজ করে, যদিও এই সমীকরণে ব্যবহৃত ধ্রুবকের সংখ্যা ভ্যানডারওয়াল্‌স্ সমীকরণের চেয়ে বেশী নয়। V_c এবং $\frac{RT_c}{P_cV_c}$ এর মান এই সমীকরণেও যথাক্রমে $3b$ ও $\frac{8}{3}$ পাওয়া যায়।

বার্থেলটের সমীকরণকে সঙ্কুচিত করে লেখা যায় :

$$pV\left(1+\frac{3}{p_rV_r^2T_r}\right)\left(1-\frac{1}{3V_r}\right)=RT \qquad 7.10.2$$

পরীক্ষালব্ধ ফলের সংগে অধিকতর সঙ্গতির জন্য সম্পূর্ণ প্রায়োগিকভাবে এই সমীকরণকে কিছুটা পরিবর্তিত করা হয় :

$$pV\left(1+\frac{16}{3p_rV_r^2T_r}\right)\left(\quad-\frac{1}{4V_r}\right)=RT \qquad 7.10.3$$

সন্ধিবিন্দুর নিকটবর্তী অঞ্চল ব্যতীত শেষোক্ত সমীকরণ সুপ্রযোজ্য হতে দেখা দেখা যায়।

(ii) **ক্লসিয়াসের (Clausius) সমীকরণ ঃ**

বার্থেলট সমীকরণে চাপের শুদ্ধি নির্দেশক রাশিতে V এর পরিবর্তে $V+c$ ব্যবহার করলে ক্লসিয়াসের সমীকরণ পাওয়া যায় ঃ

$$\left(p+\frac{a}{(V+c)^2 T}\right)(V-b)=RT \qquad 7.10.4$$

অতিরিক্ত ধ্রুবক c ব্যবহারের ফলে এই সমীকরণ কোন কোন গ্যাসের ক্ষেত্রে ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণ অপেক্ষা ভাল কাজ করে কিন্তু সব গ্যাসের ক্ষেত্রে নয়। মোটের উপর এই সূত্র ব্যবহারের কোন বাড়তি সুবিধা নেই।

(iii) **ডিটেরিসি (Dieterici) সমীকরণ ঃ**

গ্যাস-অণুর আসঞ্জন (cohesion) জনিত বলের জন্য গ্যাসের সীমানায় অণুর ঘনত্বের পরিবর্তন বিবেচনা ক'রে ডিটেরিসি এই সমীকরণে উপনীত হন ঃ

$$p=\frac{RT}{V-b}e^{-\frac{a}{RTV}} \qquad 7.10.5$$

অল্পচাপে যখন V এর মান b অথবা $\frac{a}{RT}$ এর তুলনায় বৃহৎ হয়, তখন 7.10.5 সমীকরণ ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণে পরিণত হয়, কেননা এই অবস্থায়

$$p\,e^{\frac{a}{RTV}} \simeq p\left(1+\frac{a}{RTV}\right) \simeq p+\frac{a}{V^2}\text{।}$$

ডিটেরিসি সমীকরণ অনুযায়ী $V_c=2b$ এবং $\frac{RT_c}{p_cV_c}=\frac{e^2}{2}$ বা 3·695। এই দুই মান পরীক্ষালব্ধ মানের অপেক্ষাকৃত অধিক নিকটবর্তী।

(iv) **সাহা ও বসুর সমীকরণ ঃ**

$$p=\frac{RT}{2b}e^{-\frac{a}{RTV}}\log_e\left(\frac{V-2b}{V}\right) \qquad 7.10.6$$

সাহা ও বসু পরিসংখ্যানমূলক তাপগতিবিদ্যা থেকে এই সমীকরণ প্রতিষ্ঠিত করেন। $b<<V$ হ'লে এই সমীকরণ ডিটেরিসি সমীকরণের অনুরূপ হয়। $\frac{RT_c}{p_cV_c}$ রাশির মান এই সমীকরণ অনুযায়ী 3·53, সুতরাং ভ্যানডার ওয়াল্‌স্‌ সমীকরণ অপেক্ষা এই মান অধিকতর বাস্তবানুগ।

(v) **ক্যালেণ্ডার (Callendar) সমীকরণ :**

$$V-b=\frac{RT}{p}-c\left(\frac{T_0}{T}\right)^n$$

এই সমীকরণ বিশেষতঃ স্টীমের ক্ষেত্রে প্রযুক্ত হয়। *b* ও *c* এখানে অনির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং *n* স্টীমের রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ার সূত্র

$$\frac{p}{T^{n+1}}=\text{ধ্রুবরাশি}$$

এর মধ্যে ব্যবহৃত পরামিতি (parameter)।

অধিকতর সংখ্যক অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ব্যবহার ক'রে আরও অনেক অবস্থা সমীকরণ প্রস্তাবিত হ'য়েছে। এই সকল সমীকরণের ব্যবহারিক উপযোগিতা থাকলেও তত্ত্বগত সাফল্য ততটা উল্লেখযোগ্য নয় কেননা যথেষ্ট অধিকসংখ্যক অনির্দিষ্ট ধ্রুবকবিশিষ্ট কোনও সমীকরণের সংগে যে কোনও লেখেরই সমন্বয় হ'তে পারে। প্রকৃতপক্ষে কোন অবস্থা সমীকরণই সকল গ্যাসের ক্ষেত্রে সমানভাবে কাজ করতে পারে না। অণুর গঠনের সংগে $E(r)$ (7.8.6 সূত্রে) এর সম্পর্ক বিদ্যমান, সুতরাং অবস্থা সমীকরণও বিশেষ গ্যাসের প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল হবে।

অষ্টম অধ্যায়

ব্রাউনীয় গতি

৮.১ ব্রাউনীয় গতির প্রকৃতি

গ্যাসের অণ্ু সাধারণভাবে অতি শক্তিশালী অণ্ুবীক্ষণের সাহায্যেও দেখা যায় না। সুতরাং অণ্ুর যে অবিরাম গতির উপর গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের ভিত্তি, সেই গতি প্রত্যক্ষ করা যায় না। অপরপক্ষে যে সকল বৃহৎ (macroscopic) বস্তুর গতিবিধি সহজেই লক্ষ্য করা যায় সেরূপ কোন বস্তুকে কোন গ্যাসের মধ্যে রাখা হ'লে তার উপর যুগপৎ বিশালসংখ্যক গ্যাস-অণ্ুর সংঘর্ষ ঘটে। কিন্তু এই সংঘর্ষগুলি চতুর্দিক থেকে সমানভাবে হয়, ফলে লব্ধ ভরবেগের হার অতি সামান্যই হয়। উপরন্তু ঐ বস্তুর ভর তুলনায় অধিক হওয়ায় সামান্য বল থেকে জাত ত্বরণ ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য হয় না। (অন্যথায়, নিয়ত গ্যাস-অণ্ুর সংঘর্ষের ফলে ইতস্ততঃ বিক্ষিপ্ত হ'তে হ'লে পৃথিবীর বাতাবরণে জীবনযাপন দুরূহ হ'ত।) আণবিক ও বৃহৎ, এই দুই পরিমাপের মাঝামাঝি, অণ্ুবীক্ষণদৃশ্য (microscopic) পরিমাপের বস্তুকণার ক্ষেত্রে সময়বিশেষে এই দুই অসুবিধাই দূরীভূত হ'তে পারে। তরল বা গ্যাসের মধ্যে এই ধরনের বস্তুকণা প্রলম্বিত (suspended) রেখে অণ্ুবীক্ষণের সাহায্যে তার গতি-প্রকৃতি নির্ধারণ করা যায়। বর্তমান অধ্যায়ে এই ধরনের পরীক্ষার বিষয় আলোচনা করা হবে।

অণ্ুবীক্ষণদৃশ্য বস্তুকণার গতিবিধি সর্বপ্রথম লক্ষ্য করেন রবার্ট ব্রাউন (Robert Brown, 1827) নামে এক উদ্ভিদবিদ্। অণ্ুবীক্ষণের সাহায্যে জলের মধ্যে প্রলম্বিত পরাগরেণ্ু নিরীক্ষণের সময় তিনি রেণ্ুগুলির এক অবিরাম ইতস্ততঃ সঞ্চরণ লক্ষ্য করেন। এই গতি সম্পূর্ণ অনিয়মিত ও বিশৃঙ্খল (random); কোন একটি রেণ্ুকণার গতি নিকটবর্তী অন্য রেণ্ুকণার গতির সংগে সম্পূর্ণ সম্পর্কবিহীন। সুতরাং ঐ রেণ্ুর গতি তরলের মধ্যে কোন ঘূর্ণিস্রোত বা পরিচলন-স্রোত থেকে উৎপন্ন এরূপ ব্যাখ্যাও খাটে না। পরবর্তী অংশে বর্ণিত জাঁ পেরাঁ (Jean Perrin)র পরীক্ষা থেকে আরও সুস্পষ্টভাবে প্রমাণিত হয় যে তরল বা গ্যাসের মধ্যে প্রলম্বিত বস্তুকণার এই গতির কারণ ঐ তরল বা গ্যাসের অণ্ুর সংগে সংঘর্ষ দ্বারা প্রাপ্ত ভরবেগ।

প্রকৃতপক্ষে এই ধরনের বস্তুকণাকে তরল বা গ্যাসের সংগে তাপসাম্যে অবস্থিত আদর্শ গ্যাসের অণু হিসাবে দেখা যায়। তাপসাম্যের ফলে প্রলম্বিত বস্তুকণা নিজস্ব আকার নির্বিশেষে গড়ে $\frac{3}{2}kT$ পরিমাণ রৈখিক গতীয় শক্তি লাভ করে। বস্তুকণার ভর যত অধিক হয় তার গতিবেগ ততই অল্প হয়, সেইজন্যই অতি বৃহৎ কণার গতি দৃশ্যমান হয় না। পেরাঁ (1908) এক পরীক্ষায় উচ্চতার সংগে তরলের মধ্যে প্রলম্বিত ব্রাউনীয় কণিকার ঘনত্বসংখ্যার পরিবর্তন পর্য্যবেক্ষণ করেন। পরবর্তী দুই অংশে আলোচিত পেরাঁর এই পরীক্ষায় উপরের ধারণার সমর্থন পাওয়া যায়।

৮.২ পেরাঁর পরীক্ষার তত্ত্বগত ভিত্তি

ব্রাউনীয় কণিকাগুলি যদি আদর্শ গ্যাস-অণুর মত আচরণ করে তবে অভিকর্ষক্ষেত্রে আদর্শ গ্যাস-অণুর উচ্চতার বণ্টনসূত্র প্রলম্বিত কণিকাগুলির উপরেও প্রযোজ্য হবে।

সমান উষ্ণতা ও একক প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট গ্যাসের এক উল্লম্ব স্তম্ভ কল্পনা করা যাক। যে কোনও অনুভূমিক তল থেকে z উচ্চতায় এই গ্যাসের এক অনুভূমিক স্তরের বেধ dz ধরা যাক। এই স্তরের উপরে ও নীচে গ্যাসের চাপ যথাক্রমে $p+dp$ ও p। অণুর ভর m ও ঘনত্বসংখ্যা n হ'লে $p=nkT$ এবং স্তরমধ্যস্থ গ্যাসের ঘনত্ব $\rho=mn$। dz বেধের এই গ্যাস স্তরের সাম্য বিবেচনা করে পাওয়া যায়

$$p=p+dp+g\rho dz$$

অর্থাৎ $$dp=-g\rho dz \qquad 8.2.1$$

dp এর মান ঋণাত্মক হওয়ার অর্থ এই যে উচ্চতাবৃদ্ধির সংগে চাপ কমে। p ও ρ এর মান ব্যবহার ক'রে পাওয়া যায়

$$dn\,.\,kT=-mg\,ndz$$

এই সূত্রকে সমাকলন ক'রে এবং z_0 উচ্চতায় n এর মান n_0 ধ'রে পাওয়া যায়

$$n=n_0e^{-\frac{mg}{kT}(z-z_0)} \qquad 8.2.2$$

8.2.2 সূত্র বায়ুমণ্ডলে উচ্চতার সঙ্গে বায়ুর অণুসমূহের ঘনত্বসংখ্যার পরিবর্তন সূচিত করে এবং সাধারণভাবে এই সূত্র 'লাপ্লাসের বায়ুমণ্ডল সূত্র' (Laplace's Law of Atmospheres) নামে খ্যাত। পূর্বোক্ত ধারণা অনুযায়ী এই সূত্র ব্রাউনীয় কণিকার ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করা যেতে পারে।

এক্ষেত্রে m এর স্থলে তরলে প্রলম্বিত ব্রাউনীয় কণিকার কার্যাকরী ভর, অর্থাৎ তরলের প্লবতা (buoyancy) হেতু কণিকার হ্রাসপ্রাপ্ত ভর ব্যবহৃত হবে। 8.2.2 সূত্রানুযায়ী, যদি গোলকাকৃতি ব্রাউনীয় কণিকার ব্যাসার্ধ $= a$

কণিকা ও তরলের ঘনত্ব (যথাক্রমে) $= d, d'$

ও আভোগাড্রো সংখ্যা $= N_0$

হয় তবে

$$n = n_0 \, e^{-\frac{4\pi a^3 N_0 g}{3RT}(d-d')(z-z_0)} \qquad 8.2.3$$

এবং সেই সংগে

$$N_0 = \frac{3RT}{4\pi a^3 g\,(d-d')\,(z-z_0)} \,.\, \log_e \frac{n_0}{n} \qquad 8.2.4$$

পেরাঁর পরীক্ষায় ব্রাউনীয় কণিকার ক্ষেত্রে উপরের আলোচনার যাথার্থ্য দুইভাবে পরীক্ষিত হয়। প্রথমতঃ, উচ্চতার সংগে n এর পরিবর্তন 8.2.3 সূত্রানুযায়ী হয় কিনা দেখা যেতে পারে। দ্বিতীয়তঃ, 8.2.4 সূত্র থেকে আভোগাড্রো সংখ্যার মান নির্ণয় ক'রে অন্যান্য উপায়ে নির্ণীত মানের সংগে মেলানো যেতে পারে। এই দুই উদ্দেশ্যে পরিচালিত পেরাঁর পরীক্ষা পরবর্তী অংশে বর্ণিত হবে।

৮.৩ পেরাঁর পরীক্ষার বর্ণনা

পেরাঁর পরীক্ষায় জলের মধ্যে গ্যাম্বোজ ও ম্যাস্টিকের (বৃক্ষজাত রঞ্জন-জাতীয় গঁদ) গোলাকৃতি কণিকার প্রলম্বন ব্যবহৃত হয়। আংশিক অপকেন্দ্রনের (fractional centrifuging) সাহায্যে প্রলম্বনের মধ্যে কেবলমাত্র সমান আকারের কণিকা পৃথক ক'রে নেওয়া হয়। এই প্রলম্বনের কয়েক বিন্দুমাত্র 0·1 মিলিমিটার গভীর কাচের পাতের আবরণবিশিষ্ট এক কক্ষে রাখা হয়। অতি অল্প ফোকাস-গভীরতা (depth of focus) বিশিষ্ট অণুবীক্ষণের সাহায্যে এই প্রলম্বনের মধ্যে দৃষ্টিপাত করলে দৃষ্টিক্ষেত্রে মাত্র কয়েক মাইক্রন গভীরতার মধ্যে অবস্থিত কণিকাগুলি স্পষ্টভাবে নজরে আসে। একই স্তরে স্পষ্টভাবে দৃষ্ট কণিকার সংখ্যা অনেকবার গণনা করলে গড় সংখ্যাটিকে ঐ স্তরের ঘনত্ব সংখ্যার সমানুপাতী হিসাবে ধরা যায়। অণুবীক্ষণটিকে বিভিন্ন স্তরের উপর ফোকাস ক'রে এই উপায়ে বিভিন্ন উচ্চতায় প্রলম্বিত কণিকার ঘনত্বসংখ্যার তুলনামূলক মান সহজেই নির্ণীত হয়। পেরাঁর পরীক্ষায় $\log_e \frac{n_0}{n}$

ও $(z-z_0)$ সমানুপাতী হ'তে দেখা যায়, যার থেকে n এর উচ্চতানির্ভরতার সূচক (exponential) নিয়মের সত্যতা প্রমাণিত হয়।

আভোগাড্রো সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য কণিকাগুলির আকার ও ঘনত্বও জানা প্রয়োজন। কণিকার আকার জানার জন্য সাধারণভাবে স্টোক্‌স্ সূত্রের (Stokes' law) সাহায্য নেওয়া হয়। একই প্রলম্বন কোন কৈশিক নলের মধ্যে রাখা হ'লে কণিকাগুলি সমগতিতে নিম্নাভিমুখে পড়তে থাকে। প্রলম্বনের উপরের স্বচ্ছ অংশের দৈর্ঘ্য যে হারে বৃদ্ধি পায় তার থেকে কণিকার পতনের বেগ পাওয়া যায়। স্টোক্‌স্ সূত্র অনুযায়ী এই বেগের মান (v) থেকে কণিকার ব্যাসার্ধ a এর মান পাওয়া যায়। তরলের সান্দ্রতাঙ্ক η হ'লে

$$a=\left[\frac{9}{2g}\cdot\frac{\eta v}{d-d'}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 8.3.1$$

কণিকার ঘনত্ব d নির্ণয় করতে V আয়তনের প্রলম্বনের ভর m ও তার মধ্যে কণিকাগুলির ভর m' জানা প্রয়োজন। নির্দিষ্ট আয়তনের প্রলম্বনের জলীয়াংশ বাষ্পীভূত ক'রে অবশিষ্ট কঠিন অংশের ভর নির্ণয় করেই m' পাওয়া যায়। জলের ঘনত্ব d_0 হ'লে V আয়তনের মধ্যে কেবলমাত্র জলের আয়তন $\frac{m-m'}{d_0}$। কণিকার মোট আয়তন $V-\frac{m-m'}{d_0}$, সুতরাং

$$d=\frac{m'}{V-\frac{m-m'}{d_0}} \qquad 8.3.2$$

a ও d এর মান জানা গেলে 8.2.4 সূত্র থেকে সহজেই N_0 এর মান জানা যায়। পেরাঁ এরূপ পরীক্ষার সাহায্যে আভোগাড্রো সংখ্যার মান নির্ধারণ করেন $(6.5\text{-}7.2)\times10^{23}$। এই সংখ্যা আভোগাড্রো সংখ্যার সূক্ষ্মভাবে নির্ণীত মান অপেক্ষা কিছু অধিক হ'লেও মোটামুটিভাবে সঠিক। বিশেষতঃ η, a ও উষ্ণতার অতিমাত্রায় বিভিন্ন মানেও পেরাঁর পরীক্ষায় N_0 এর মান প্রায় একই পাওয়া যায়। এবং এর থেকে আমাদের 8.2.3 ও 8.2.4 সূত্রদ্বয়ের ভিত্তিস্বরূপ অঙ্গীকার—ব্রাউনীয় কণিকা ও গ্যাস-অণুর আচরণসাদৃশ্য—সন্দেহাতীতরূপে প্রমাণিত হয়।

৮.৪ রৈখিক ব্রাউনীয় গতি

ব্রাউনীয় গতির প্রকৃতি সম্পর্কে যে ধারণা ইতিপূর্বে প্রতিষ্ঠিত হয়েছে এখন তার উপর ভিত্তি ক'রে ব্রাউনীয় কণিকার রৈখিক গতির (translational

motion) তত্ত্বগত আলোচনা করা যেতে পারে। আইনস্টাইন (Einstein, 1906), স্মলুকভ্‌স্কি (Smoluchowski, 1906) ও লাঁজভাঁর (Langevin, 1908) বিশ্লেষণে নির্দিষ্ট সময়ে কোন একটি ব্রাউনীয় কণিকার মোট সরণের (displacement) গড় মানের সংগে আভোগাড্রোর সংখ্যার সম্পর্ক নির্ণীত হয়। এই অংশে লাঁজভাঁ ও আইনস্টাইনের পদ্ধতিতে উল্লিখিত সম্পর্ক প্রমাণিত হবে।

লাঁজভাঁর পদ্ধতি

কোন একটি ব্রাউনীয় কণিকার উপর প্রলম্বনের মধ্যস্থ অন্যান্য অণু সর্বদাই যে বল প্রয়োগ করে, তার মিলিত যোগফলকে দুইভাগে ভাগ করা যায়। ধরা যাক, কণিকার নিশ্চল অবস্থাতেও তার উপর প্রযুক্ত বলসমূহের অপ্রতিমিত (unbalanced) যোগফল, অর্থাৎ যে বল ব্রাউনীয় গতি উৎপন্ন করে, তার মান $\vec{P}$। এছাড়া $\vec{v}$ গতিবেগবিশিষ্ট ব্রাউনীয় কণিকার উপর প্রলম্বনের তরল বা গ্যাসের সান্দ্রতা হেতু যে বল ক্রিয়া করে তার মান $\vec{F}$। গোলাকার কণিকার ক্ষেত্রে স্টোক্‌স্ সূত্র অনুযায়ী

$$\vec{F} = -6\pi a\eta\vec{v}$$

যার মধ্যে a = কণিকার ব্যাসার্ধ ও η প্রলম্বনের সান্দ্রতাঙ্ক। $\vec{F}$ এর মান ঋণাত্মক কেননা সান্দ্রতাজনিত বল সর্বদাই গতিবেগের বিপরীতদিকে ক্রিয়া করে। ব্রাউনীয় কণিকার গতিবেগের সূত্র লেখা যেতে পারে ঃ

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{P} - 2b\dot{\vec{r}} \quad (2b = 6\pi a\eta) \qquad 8.4.1$$

কোন ব্রাউনীয় কণিকা নির্দিষ্ট সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে, বিশেষ কোন এক অক্ষ x-অভিমুখে তার উপাংশের মান $\triangle x$ ধরা যাক। পরীক্ষার দ্বারা প্রকৃতপক্ষে $(\triangle x)^2$ এর গড় মানই পরিমিত হয়। $\overline{(\triangle x)^2}$ এর তাত্ত্বিক মান নির্ণয় করতে 8.4.1 সূত্রের x-উপাংশ ব্যবহার করা প্রয়োজন ঃ

$$m\ddot{x} = P_x - 2b\dot{x} \quad (P_x = \vec{P} \text{ এর } x \text{ উপাংশ})$$

উপরের সূত্রকে x দ্বারা গুণ ক'রে, ও

$$x\dot{x} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2)$$

$$x\ddot{x} = \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x^2) - (\dot{x})^2$$

সূত্রদ্বয় ব্যবহার ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x^2)-m(\dot{x})^2=xP_x-b\frac{d}{dt}(x^2) \qquad 8.4.2$$

এক বৃহৎসংখ্যক কণিকার ক্ষেত্রে 8.4.2 সমীকরণের উভয় পার্শ্বের গড় মান নির্ধারণ করা যাক। গতীয় শক্তির সমবিভাজন নীতি থেকে $\overline{m(\dot{x})^2}=kT$; এবং যেহেতু x ও P_x এর মান সমান সম্ভাব্যতায় ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হ'তে পারে, $\overline{xP_x}=0$। এই উপায়ে পাওয়া যায় :

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\overline{x^2})-kT=-b\frac{d}{dt}(\overline{x^2}) \qquad 8.4.3$$

ধরা যাক $\frac{d}{dt}(\overline{x^2})=z$। 8.4.3 থেকে

$$\frac{m}{2}\frac{dz}{dt}=kT-bz \qquad 8.4.4$$

এই সমীকরণ সমাকলনযোগ্য। $t=0$ সময়ে $\frac{d}{dt}(\overline{x^2})=2\,x\dot{x}=0$ কেননা এই সময়ে x-এর মান শূন্য থাকে।

$$\text{সুতরাং} \quad \int^{z}\frac{dz}{kT-bz}=\int^{t}\frac{2}{m}\,dt$$

$$\text{বা} \quad z=\frac{kT}{b}\left(1-e^{-\frac{2b}{m}\cdot t}\right) \qquad 8.4.5$$

$\overline{x^2}$ এর মান পরীক্ষাদ্বারা পরিমাপযোগ্য। $t=0$ ও $t=\tau$ সময়ের মধ্যে অণুর x-অক্ষে সরণ যদি $\triangle x$ হয় তবে

$$\overline{(\triangle x)^2}=\int_0^{\tau}z\,dt=\frac{kT}{b}\left[\tau+\frac{m}{2b}\left(e^{-\frac{2b}{m}\cdot\tau}-1\right)\right]$$

ব্রাউনীয় কণিকার ক্ষেত্রে, মোটামুটিভাবে $a \simeq 10^{-4}$ cm, $\eta \simeq 10^{-2}$ poise ও $d \simeq 1$ gm cm^{-3} ধরা হ'লে

$$\frac{m}{2b}=\frac{\frac{4}{3}\pi a^3 d}{6\pi a\eta}\simeq 10^{-7}\text{ sec}$$

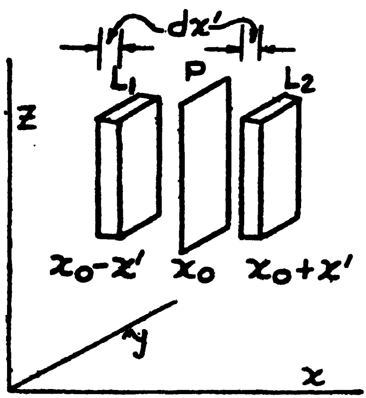
এই অবস্থায় $\frac{m}{2b}<<\tau$, কেননা পরীক্ষায় τ এর ব্যবহৃত মান $\simeq$ 20 sec।

$$\text{সুতরাং} \quad \overline{(\triangle x)^2}=\frac{kT}{b}\cdot\tau=\frac{RT}{3\pi a\eta N_0}\cdot\tau \qquad 8.4.6$$

আইনস্টাইনের পদ্ধতি

আইনস্টাইন প্রথমতঃ ব্রাউনীয় কণিকার বিশৃঙ্খল গতিজনিত ব্যাপনের পরিমাণ নির্ধারণ করেন। কণিকার আস্রবণপ্রসূত (Osmotic) চাপের ফলে ব্যাপনের যে পরিমাণ প্রত্যাশা করা যায় তার সঙ্গে পূর্বের পরিমাণের সমতা থেকে আইনস্টাইন 8.4.6 সূত্র প্রমাণ করেন।

ধরা যাক প্রলম্বিত কণিকার ঘনত্বসংখ্যা n x-অক্ষ অভিমুখে $\frac{dn}{dx}$ হারে বৃদ্ধি পায়। x-অক্ষের উপর লম্ব এক সমতল P (চিত্র ৮.১) কল্পনা করা



চিত্র ৮.১

যাক যেখানে ঘনত্বসংখ্যার মান n_0। P সমতলের নির্দেশাংক $x=x_0$। $x=x_0-x'$ ও $x=x_0+x'$ নির্দেশাংকে P তলের সমান্তরাল, A ক্ষেত্রফল ও dx' বেধবিশিষ্ট দুইটি স্তর L_1 ও L_2 কল্পনা করা যাক। এই দুই স্তরে কণিকার ঘনত্বসংখ্যা যথাক্রমে $n_0-\frac{dn}{dx}.x'$ ও $n_0+\frac{dn}{dx}.x'$। ব্রাউনীয় গতির ফলে কোন একটি কণিকা τ সময়ে x অক্ষ অভিমুখে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তার মান ξ ও $\xi+d\xi$ এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা $f(\xi)d\xi$ ধরা যাক। স্পষ্টতঃই

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi=1$$

এবং $f(\xi)=f(-\xi)$

L_1 স্তর থেকে বার হ'য়ে যে সংখ্যক কণিকা τ সময়ে P কে অতিক্রম করে তার মান

$$A\,dx'\left(n_0 - \frac{dn}{dx}\cdot x'\right)\int_{x'}^{\infty} f(\xi)d\xi \qquad 8.4.7\ a$$

এবং অনুরূপভাবে L_2 থেকে বার হ'য়ে যে সংখ্যক কণিকা τ সময়ে P কে অপর দিক থেকে অতিক্রম করে তার মান

$$A\,dx'\left(n_0 + \frac{dn}{dx}\cdot x'\right)\int_{-\infty}^{-x'} f(\xi)d\xi \qquad 8.4.7\ b$$

p তলের মধ্য দিয়ে τ সময়ে L_2 স্তরের দিক থেকে L_1 এর দিকে (অর্থাৎ n এর উন্নতির বিপরীত মুখে) প্রবাহিত কণিকার মোট সংখ্যা 8.4.7 সূত্রদ্বয়ের বিয়োগফলকে x' এর সকল মানের জন্য সমাকলন ক'রে পাওয়া যায় :

$$\int_{x'=0}^{\infty} A\,dx'\left[\left(n_0 + \frac{dn}{dx}\cdot x'\right)\int_{-\infty}^{-x'} f(\xi)d\xi - \left(n_0 - \frac{dn}{dx}\cdot x'\right)\int_{x'}^{\infty} f(\xi)\,d\xi\right]$$

$$= \int_{x'=0}^{\infty} 2A\,dx'\cdot\frac{dn}{dx}\cdot x'\int_{x'}^{\infty} f(\xi)\,d\xi \qquad \left(\because \int_{-\infty}^{-x'} f(\xi)\,d\xi = \int_{x'}^{\infty} f(\xi)d\xi\right)$$

$$= 2A\,\frac{dn}{dx}\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\,d\xi \int_{x'=0}^{\xi} x'\,dx' \quad \text{(সমাকলনের সীমা পুনর্বিন্যাসের সাহায্যে)}$$

$$= A\,\frac{dn}{dx}\cdot\int_{0}^{\infty} \xi^2 f(\xi)\,d\xi$$

$$= \tfrac{1}{2} A\,\frac{dn}{dx}\cdot\overline{\xi^2} \qquad 8.4.8$$

এখানে $\overline{\xi^2} = \int \xi^2 f(\xi)\,d\xi = \tau$ সময়ে কণিকার সরণের x-উপাংশের গড়-

বর্তমান। ব্রাউনীয় কণিকার ব্যাপনাংকের মান D হ'লে 8.4.8 রাশিমালা $DA\tau \frac{dn}{dx}$ এর সমান হবে। অর্থাৎ

$$D = \frac{\overline{\xi^2}}{2\tau} \qquad 8.4.9$$

এই ব্যাপন আস্রবণপ্রসূত চাপের তারতম্যের ফলে ঘটে এই দৃষ্টিভঙ্গী থেকে ব্যাপনাংকের মান নির্ণয় করা যায়। এই চাপের পরিমাণ যে কোনও বিন্দুতে

$$p = nkT$$

এবং একক আয়তনের মধ্যস্থ অণুসমূহের উপর মোট কার্যকরী বলের x-উপাংশ $\frac{dp}{dx}$ বা $kT\frac{dn}{dx}$। প্রতি কণিকার উপর প্রযুক্ত বলের x-উপাংশ $\frac{kT}{n} \cdot \frac{dn}{dx}$। এই বলের জন্য কণিকার কোন স্থির ত্বরণ উৎপন্ন হয় না। তরলের সান্দ্রতার জন্য গোলকাকৃতি কণিকা এমন এক প্রান্তিক বেগ (terminal velocity) লাভ করে যাতে নিম্নের সূত্র সিদ্ধ হয়ঃ

$$\frac{kT}{n} \cdot \frac{dn}{dx} = 6\pi a\eta v \qquad (v = \text{প্রান্তিক বেগ}) \quad 8.4.10$$

কিন্তু একক সময়ে nv সংখ্যক অণু yz তলে একক ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট প্রস্থচ্ছেদ অতিক্রম করে। সুতরাং

$$nv = D \cdot \frac{dn}{dx} \qquad 8.4.11$$

8.4.10 ও 8.4.11 সূত্রের সাহায্যে $D = \frac{kT}{6\pi a\eta} = \frac{RT}{6\pi a\eta N_0}$ 8.4.12

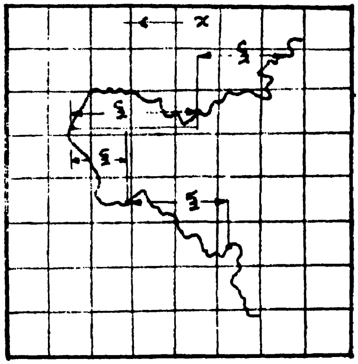
এখন 8.4.9 ও 8.4.12 সূত্রদ্বয়ে D এর দুই মানকে সমান ধ'রে পাওয়া যায়

$$\overline{\xi^2} = \frac{RT}{3\pi a\eta N_0} \cdot \tau \qquad 8.4.13$$

8.4.6 বা 8.4.13 সূত্রকে **আইনস্টাইন-স্মলুকভ্স্কি সূত্র** বলা হয়।

আইনস্টাইন-স্মলুকভ্স্কি সূত্রের সত্যতা পরীক্ষার জন্য ব্রাউনীয় কণিকার ক্ষেত্রে $\overline{\xi^2}$ এর মান জানা প্রয়োজন। $\overline{\xi^2}$ এর মান নির্ণয় করতে পেরাঁ নিম্নোক্ত উপায় অবলম্বন করেন।

অনুবীক্ষণে ব্রাউনীয় কণিকার গতি পর্যবেক্ষণকালে পেরাঁ এক অংশাংকিত (calibrated) পশ্চাদ্‌পট ব্যবহার করেন (চিত্র ৮.২)। নির্দিষ্ট সময় অন্তর কোন এক কণিকার অবস্থান পরিলক্ষিত হয় এবং সেই অবকাশে কণিকাটি x-অক্ষ অভিমুখে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তার মান নির্ণীত হয়। ξ এর অনেকগুলি মান থেকে $\overline{\xi^2}$ এর মান নির্ধারিত হয়।



চিত্র ৮.২—$\overline{\xi^2}$ এর মান নির্ণয়

পেরাঁ গ্যাম্বোজ প্রলম্বনের ক্ষেত্রে ξ এর অতি বৃহৎ সংখ্যক মান নির্ণয় করেন এবং সেগুলির বণ্টন পরীক্ষা করেন। তত্ত্বগত ভাবে ξ এর মান ξ_1 ও ξ_2 এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\overline{\xi}} \cdot e^{-\xi^2/\overline{\xi^2}}\, d\xi$$

ξ এর পরিলক্ষিত বণ্টন ও এই সূত্রের মধ্যে সুন্দর সঙ্গতি দেখা যায়। আইনস্টাইন-স্মলুকভ্‌স্কি সূত্রের সমর্থনে পেরাঁর পরীক্ষায় যে সকল তথ্য পাওয়া গেছে সেগুলি হ'ল : (*i*) $\overline{\xi^2}$ τ এর সমানুপাতী (*ii*) বিভিন্ন উষ্ণতায় $\overline{\xi^2}$ এর মান নির্ণয় ক'রে দেখা যায় $\overline{\xi^2} \propto \frac{T}{\eta_T}$ ($\eta_T - T$ উষ্ণতায় η এর মান) (*iii*) বিভিন্ন সান্দ্রতাঙ্ক বিশিষ্ট তরলের প্রলম্বন ও বিভিন্ন ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলাকার কণিকা ব্যবহার ক'রে ঐ সূত্র থেকে আভোগাড্রো সংখ্যার যে সকল মান পাওয়া যায় সেগুলি প্রায় এক। এই ধরণের পরীক্ষা থেকে পেরাঁর স্বীকৃত মান $6{\cdot}85 \times 10^{23}$।

পেরাঁর পরীক্ষায় আইনস্টাইন-স্মলুকভ্‌স্কি সূত্রের সত্যতা মোটামুটিভাবে প্রমাণিত হয়। কিন্তু পরীক্ষার ফলের সংগে এই সূত্রের পূর্ণ সঙ্গতি আশা করা যায় না। তার কারণ, প্রথমতঃ, আইনস্টাইন-স্মলুকভ্‌স্কি সূত্র কেবলমাত্র আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।* তরলে প্রলম্বিত কণিকা আদর্শ গ্যাস-অণুর মত আচরণ করে এই ধারণা সম্পূর্ণ যুক্তিযুক্ত নয়। দ্বিতীয়তঃ যেহেতু কণিকাগুলি অত্যন্ত ক্ষুদ্র এবং সেগুলি সম্পূর্ণ গোলাকার নাও হতে পারে, সেগুলির উপর স্টোক্‌স্‌ সূত্রের প্রয়োগও বাঞ্ছনীয় নয়। পেরাঁর নির্ণীত আভোগ্যাড্রোসংখ্যার মান বিভিন্ন প্রকার প্রলম্বনের ক্ষেত্রে প্রায় এক হ'লেও সম্ভবতঃ তন্ত্রগত ত্রুটির (Systematic error) জন্য এই মানগুলি অন্যান্য পরীক্ষার দ্বারা নির্ণীত প্রামাণ্য মান ($6{\cdot}064 \times 10^{23}$, রসায়ন ব্যবহৃত মাত্রায়) অপেক্ষা কিছু অধিক।

৮.৫ গ্যাসের মধ্যে রৈখিক ব্রাউনীয় গতির পর্যবেক্ষণ

মিলিক্যান (Millikan) ও ফ্লেচার (Fletcher) পরবর্তীকালে (1911) তরলের পরিবর্তে গ্যাসের মধ্যে প্রলম্বিত তৈলকণিকার ব্রাউনীয় গতি পরীক্ষা করেন। এই পরীক্ষায় ব্যবহৃত যন্ত্র মিলিক্যানের ইলেকট্রনের আধান নির্ণয়ের জন্য ব্যবহৃত যন্ত্রের অনুরূপ। অতি ক্ষুদ্র তৈলকণিকাকে আহিত অবস্থায় বায়ু বা অন্য কোন গ্যাসের মধ্যে ভাসমান রাখা হয় এবং প্রয়োজন মত তার উপর কোন বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র প্রয়োগ করা যায়।

ধরা যাক্‌ এরূপ কণিকার ক্ষেত্রে গ্যাসের সান্দ্রতা হেতু যে মন্দনকারী বল ক্রিয়া করে তার মান $F = Kv$ (v = কণিকার গতিবেগ)। লক্ষণীয় যে এক্ষেত্রে K ধ্রুবকের প্রকৃত মান জানার প্রয়োজন নেই। কণিকার ভর m ও আধান ইলেকট্রন-আধানের n গুণ, অর্থাৎ $-ne$। কোন বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র ব্যতীত যদি কণিকাটি V_1 উল্লম্ব-গতিবেগে পতিত হয় তবে $mg = Kv_1$। এখন যদি X শক্তির উল্লম্ব ও নিম্নাভিমুখী বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রে কণিকাটি V_2 গতিবেগে উত্থিত হয় তবে $neX - mg = Kv_2$।

* ব্রাউনীয় কণিকার আদর্শ গ্যাস অণুর মত আচরণ লাঁজভাঁ ও আইনস্টাইন, উভয়ের গণনাতেই ধ'রে নেওয়া হ'য়েছে। আইনস্টাইনের গণনায় খোলাখুলিভাবেই আদর্শ গ্যাসের $p = nkT$ সূত্র ব্যবহৃত হ'য়েছে। লাঁজভাঁর প্রমাণে $\overline{xP_x} = 0$ ধরার মধ্যে আদর্শ গ্যাসের অঙ্গীকার নিহিত আছে। $\overline{xP_x}$ রাশি গ্যাসের ভিরিয়ালের সংগে সম্পর্কযুক্ত (৭.৭ অংশ দ্রষ্টব্য)। এই রাশির মান তখনই শূন্য হবে যখন অণুগুলিকে বিন্দুভর ধরা যাবে ও সংঘর্ষকাল ব্যতীত অণুর পারস্পরিক বল থাকবে না।

অতএব, $K = \frac{neX}{V_2 + V_2}$ 8.5.2

বিভিন্ন কণিকার জন্য n এর মান বিভিন্ন পূর্ণসংখ্যার সমান। ফলে $(V_1 + V_2)$ এর মানসমূহ এক সাধারণ রাশি $\triangle(V_1 + V_2)$ এর গুণিতক হয়। এই রাশির মান থেকে K ধ্রুবকের মান জানা যায়

$$K = \frac{eX}{\triangle(V_1 + V_2)} \qquad 8.5.3$$

আইনস্টাইন-স্মলুকভ্স্কি সূত্রে '$6\pi a\eta$' এর পরিবর্তে 8.5.2 সূত্র দ্বারা নির্ণীত K ব্যবহার করলে পাওয়া যাবে

$$\overline{\xi^2} = \frac{2RT}{KN_0}\tau \qquad 8.5.3$$

মিলিক্যান ও ফ্লেচার তৈলকণিকার ব্রাউনীয় গতি পর্যবেক্ষণের জন্য বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের শক্তি নিয়ন্ত্রিত ক'রে কণিকার উল্লম্ব গতি প্রতিহত করেন। এই অবস্থায় হ্রস্ব-ফোকাস বিশিষ্ট দূরবীক্ষণের সাহায্যে দৃষ্টিরেখার লম্ব-অভিমুখে কণিকার অনুভূমিক গতিবেগ লক্ষ্য করা যায়। দূরবীক্ষণের দৃষ্টিক্ষেত্রে নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত দুইটি ক্রুশ-তারের (cross-wire) উপর তৈলকণিকার সংক্রমণের সময় নির্ণয় ক'রে নির্দিষ্ট সময় τ এর জন্য ξ এর গড় মান অর্থাৎ $\bar{\xi}$ নিরূপিত হয়। $\overline{\xi^2}$ এর মান

$$\overline{\xi^2} = \frac{\pi}{2}(\bar{\xi})^2 \qquad 8.5.4$$

সূত্র থেকে জানা যায়

মিলিক্যান ও ফ্লেচারের পরীক্ষা পেরাঁর পরীক্ষা অপেক্ষা অনেক বেশী সূক্ষ্ম ও তত্ত্বগত অযৌক্তিকতা থেকে মুক্ত। এই পরীক্ষায় স্টোক্স্ সূত্র ব্যবহারের অথবা কণিকার ব্যাসার্ধ নির্ণয়ের প্রয়োজন হয় না। গ্যাসের মধ্যে প্রলম্বিত অবস্থায় কোন তৈলকণিকা তরলের পৃষ্ঠটান হেতু স্বতঃই গোলকাকৃতি লাভ করে, সুতরাং $F = KV$ সূত্রের সত্যতা সম্বন্ধে নিশ্চিত হওয়া যায়। উপরন্তু গ্যাসের সান্দ্রতাঙ্ক তরলের চেয়ে মোটামুটিভাবে 100 গুণ কম সুতরাং একই আকারের কণিকার জন্য গ্যাসের মধ্যে $\frac{\xi^2}{\tau}$ এর মান 100 গুণ অধিক হয় এবং সেই অনুযায়ী অধিকতর সূক্ষ্মতার সংগে মাপা যায়।

$\overline{\xi^2}$ এর মান থেকে 8.5.2 ও 8.5.3 সূত্রের সাহায্যে N_0e এর মান জানা যায়। এই রাশির মিলিক্যান ও ফ্লেচার নির্ণীত মান $2{\cdot}88 \times 10^{14}$ e.s.u.।

e এর স্বনির্ণীত মান $(4{\cdot}77 \times 10^{-10}$ e.s.u) ব্যবহার ক'রে মিলিক্যান N_0 এর মান পেয়েছিলেন $6{\cdot}06 \times 10^{23}$ ।

৮·৬ কৌণিক ব্রাউনীয় গতি

ব্রাউনীয় কণিকার উপর কার্যকরী বলের ভ্রামক কণিকাটির কৌণিক গতি সঞ্চার করে। উচ্চ সুবেদিতাসম্পন্ন ব্যাবর্ত-তুলার (torsion balance) এরূপ কৌণিক ব্রাউনীয় গতি গবেষণাগারেই পরিলক্ষিত হ'য়েছে।

শক্তির সমবিভাজন নীতি থেকে আইনস্টাইন গোলাকৃতি ব্রাউনীয় কণিকার τ সময়ের মধ্যে কৌণিক বিক্ষেপের গড় বর্গের মান নির্ধারণ করেন :

$$\overline{\theta^2} = \frac{RT}{4\pi a^3 \eta N_0} \cdot \tau \qquad 8.6.1$$

(বিভিন্ন চিহ্নের অর্থ 8.4.13 সূত্রের অনুরূপ)

পেরাঁ অপেক্ষাকৃত বড় আকারের গোলাকার ম্যাস্টিকের কণার কৌণিক ব্রাউনীয় গতি লক্ষ্য করেন। এরূপ কণার উপর কোন ত্রুটিচিহ্নের গতিবিধি লক্ষ্য ক'রে কণার ঘূর্ণনকাল (period of rotation) নির্ণয় করা যায়। এই উপায়ে নির্ধারিত $\frac{\overline{\theta^2}}{\tau}$ এর মান থেকে পেরাঁ N_0 এর মান লাভ করেন $6{\cdot}5 \times 10^{23}$ । পেরাঁর অন্যান্য পরীক্ষালব্ধ মানের সংগে এই মানের সন্তোষজনক সমন্বয় বর্তমান।

নবম অধ্যায়

আণবিক তত্ত্বের প্রয়োগ

৯.১ সূচনা

গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের বিষয়ে পূর্বের অধ্যায়সমূহে যে আলোচনা করা হ'ল তার থেকে গ্যাসের আচরণের কয়েকটি দিক সম্বন্ধে কিছুটা পরিমাণগত ধারণা জন্মাবে। সেই সংগে গ্যাসের আচরণ বিশ্লেষণে কিছু প্রচলিত (এবং প্রাক্-কণিকাবাদী) গাণিতিক পদ্ধতির সম্পর্কেও পরিচয় লাভ করা যাবে। তবে আণবিক তত্ত্বের আলোচনা পদার্থের যে পরিধির মধ্যে সীমিত রাখা হ'য়েছে স্বভাবতঃই তার সম্ভাব্য প্রয়োগের পরিধি তার চেয়ে অনেক বেশী বিস্তৃত। বস্তুতঃ পদার্থের সকল ধর্মেরই চরম ব্যাখ্যা আণবিক তত্ত্বের মধ্যে নিহিত। আণবিক তত্ত্বের স্বীকৃত পরিধির বহির্ভূত যে সব বিষয়ে এই তত্ত্বের ধারণাবলী প্রয়োগ ক'রে সাফল্য লাভ করা গেছে এই অধ্যায়ে সেগুলির কয়েকটি সন্নিবিষ্ট হ'ল।

যে সকল বিষয় এখানে আলোচিত হবে সেগুলি হ'ল (ক) পদার্থের মেরুপ্রবণতা (polarizability) এবং কোন কোন বস্তুর ক্ষেত্রে এই রাশির আপাত-ব্যত্যয়ের ব্যাখ্যা এবং (খ) গ্যাসের মধ্যে বিদ্যুৎ-পরিবহণ সংক্রান্ত বিভিন্ন প্রক্রিয়ার বিশ্লেষণ।

৯.২ পদার্থের মেরুপ্রবণতা

কোন অন্তরক (dielectric) পদার্থ বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের মধ্যে রক্ষিত হ'লে ঐ পদার্থের মেরুৎপাদন (polarization) ঘটে। বৈদ্যুতিক শক্তি $\vec{E}$ ও পদার্থের একক আয়তনে আবিষ্ট দ্বিমেরুশক্তি (induced dipole-moment) $\vec{P}$ পরস্পর সমানুপাতী, অর্থাৎ

$$\vec{P} = \eta \vec{E} \qquad 9.2.1$$

η কে অন্তরকের বৈদ্যুতিক গ্রাহিতা (dielectric susceptibility) বলা হয়।

একক আয়তনে অণুর সংখ্যা n হ'লে এবং প্রতি অণুর গড় দ্বিমেরু-শক্তি $\vec{m}$ হ'লে $\vec{P} = n\vec{m}$। অণুর দ্বিমেরু-শক্তি অন্তরকের মধ্যে অণুর উপর

মোট কার্যকরী বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র $\vec{F}$ এর সমানুপাতী। অন্তরকের মধ্যস্থ অন্যান্য অণুর দ্বিমেরু ক্ষেত্রের প্রভাবে মোট কার্যকরী ক্ষেত্র, $\vec{F}$, প্রযুক্ত ক্ষেত্র $\vec{E}$ অপেক্ষা কিছু অধিক হয়। বিশেষতঃ অণুগুলি যদি গোলকীয় প্রতিসাম্য (spherical symmetry) বিশিষ্ট হয় অথবা সেগুলির বিন্যাস যদি বিশৃঙ্খল হয় তবে দেখানো যায় যে

$$\vec{F}=\vec{E}+\frac{4\pi}{3}\vec{P} \qquad 9.2.2$$

ধরা যাক $\vec{m}=\gamma\vec{F}$। γ কে 'আণবিক মেরুপ্রবণতা' (molecular polarizability) বলা হয়। এখন

$$\vec{P}=n\gamma\vec{F}$$

$$=n\gamma\left(\vec{E}+\frac{4\pi}{3}\vec{P}\right)$$

অর্থাৎ $$\vec{P}=\frac{n\gamma}{1-\frac{4\pi}{3}n\gamma}\vec{E}$$

9.2.1 সূত্রের সংগে তুলনায় দেখা যায় $\eta=\dfrac{n\gamma}{1-\frac{4\pi}{3}n\gamma}$

অন্তরকের বৈদ্যুতিক আবেশাংক (dielectric constant)

$$\epsilon=1+4\pi\eta=1+\frac{4\pi n\gamma}{1-\frac{4\pi}{3}n\gamma}$$

সুতরাং $$\gamma=\frac{3}{4\pi n}\cdot\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}=\frac{3M}{4\pi N_0\rho}\cdot\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \qquad 9.2.3$$

এখানে M = গ্রাম-আণবিক ভর, N_o = আভোগাড্রো সংখ্যা

এবং ρ = পদার্থের ঘনত্ব।

$\dfrac{M}{\rho}\cdot\dfrac{\epsilon-1}{\epsilon+2}$ রাশিকে 'গ্রাম-আণবিক মেরুপ্রবণতা' (P_0) বলা হয়।

9.2.3 সূত্রানুযায়ী $$P_o=\frac{M}{\rho}\cdot\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}=\frac{4\pi}{3}N_0\gamma \qquad 9.2.4$$

9.2.3 বা 9.2.4 সূত্র ক্লসিয়াস-মোসোট্টি (Clausius-Mosotti) সমীকরণ নামে খ্যাত।

ক্লসিয়াস-মোসোটি সমীকরণের প্রমাণে স্থির বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের কল্পনা করা হ'লেও দ্রুত কম্পনশীল বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের জন্যও এই সূত্র ব্যবহার করা যেতে পারে। গ্যাসীয় বা তরল মাধ্যমে দৃশ্যমান আলোকতরঙ্গের ক্ষেত্রে এই সূত্র প্রয়োগকালে $\epsilon = \mu^2$ (μ = মাধ্যমের প্রতিসরাংক, refractive index) লেখা যেতে পারে, কেননা সাধারণতঃ এই সকল মাধ্যমের চৌম্বক গ্রাহিতার (magnetic susceptibility) মান প্রায় শূন্য ধরা যায়। 9.2.4 সূত্র থেকে পাওয়া যায়, মাধ্যমের 'গ্র্যাম-আণবিক প্রতিসরাংক' বা

$$A = \frac{M}{\rho} \cdot \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N_0 \gamma \qquad 9.2.5$$

শেষোক্ত সূত্র **লোরেন্ৎস্-লোরেন্ৎস্** (Lorentz-Lorenz) **সমীকরণ** নামে পরিচিত।

বাস্তব অবস্থার সংগে 9.2.5 সূত্রের সুন্দর সমন্বয় দেখা যায়। যেহেতু γ অণুর বা পরমাণুর নিজস্ব ধর্ম, পদার্থের সকল অবস্থাতেই A রাশির মান স্থির থাকা উচিৎ। পরীক্ষায় দেখা যায় পদার্থের গ্যাসীয় ও তরল অবস্থায় এবং গ্যাসের ক্ষেত্রে বিভিন্ন চাপে A রাশির মান সত্যই অপরিবর্তিত থাকে। রাসায়নিক যৌগের ক্ষেত্রে যৌগের বিভিন্ন পরমাণুর জন্য γ এর মান (γ_1, γ_2 ইত্যাদি) থেকে A রাশির মান পাওয়া যায় $A = \frac{4\pi}{3} N_0 \sum \gamma_i$। এই মানের সংগে পরীক্ষালব্ধ মানের সঙ্গতি দেখা যায়।

9.2.5 সূত্র পূর্বের 9.2.4 সূত্র থেকে পাওয়া গেলেও 9.2.4 সূত্র বা ক্লসিয়াস-মোসোটি সমীকরণের সংগে পরীক্ষার যথেষ্ট অসংগতি দেখা যায়। এই অসংগতি বিশেষতঃ NH_3, HCl প্রভৃতি অণুর ক্ষেত্রে ঘটে। ক্লসিয়াস-মোসোটি সমীকরণের P_0 রাশির মান বিভিন্ন উষ্ণতায় ও পদার্থের বিভিন্ন অবস্থায় স্থির থাকে না। যৌগের ক্ষেত্রে 'আণবিক মেরুপ্রবণতা' বিভিন্ন 'পরমাণবিক মেরুপ্রবণতা'র যোগফলের সমান হয় না।

ডিবাই (Debye, 1912) ক্লসিয়াস-মোসোটি সমীকরণের ব্যর্থতার কারণ নির্দেশ করেন। অণুর মেরুৎপাদন যখন কেবল বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের প্রভাবে গ্যাসঅণুর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আধানের আনুপাতিক স্থানচ্যুতির ফলে ঘটে কেবল তখনই এই সমীকরণ প্রযোজ্য। স্থায়ী বৈদ্যুত-দ্বিমেরু (electric dipole) বিশিষ্ট অণুর ক্ষেত্রে এছাড়াও অন্য এক প্রক্রিয়ায় দ্বিমেরুর উৎপত্তি হয়। বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের মধ্যে এই প্রকার অণুর দ্বিমেরু তাপজ আলোড়ন

অতিক্রম ক'রে ক্ষেত্রের দিক অভিমুখে বিন্যস্ত হ'তে চেষ্টা করে। উষ্ণতা যত অল্প হয় দ্বিমেরুর বিন্যাস তত অধিক পরিমাণে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রাভিমুখী হয় এবং মেরূৎপাদনের মাত্রাও তত বৃদ্ধি পায়।

ধরা যাক প্রতি অণুর স্থায়ী দ্বিমেরুশক্তি μ এবং বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র ও দ্বিমেরুর মধ্যে কোণের পরিমাণ θ। F বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রে দ্বিমেরুর স্থৈতিক শক্তির মান হয় $-\mu F\cos\theta$। ম্যাক্সওয়েল-বোল্‌ৎস্‌মান সূত্র অনুযায়ী যে সকল দ্বিমেরুর অক্ষের দিক θ কোণে $d\Omega$ ঘনকোণের মধ্যে থাকে সেগুলির সংখ্যা $e^{\frac{\mu F\cos\theta}{kT}}\,d\Omega$ এর সমানুপাতী হয়। সুতরাং বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র অভিমুখে অণুর দ্বিমেরুশক্তির উপাংশের গড় মান হবে

$$m=\frac{\int_0^{\pi}\mu\cos\theta\; e^{\frac{\mu F\cos\theta}{kT}}\,d\Omega}{\int_0^{\pi} e^{\frac{\mu F\cos\theta}{kT}}\,d\Omega}$$

$d\Omega=2\pi\sin\theta\,d\theta,\ \alpha=\frac{\mu F}{kT}$ এবং $x=\cos\theta$ ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$\frac{m}{\mu}=\frac{\int_{-1}^{1}x\,e^{\alpha x}\,dx}{\int_{-1}^{1}e^{\alpha x}\,dx}=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}=\text{Coth}\,\alpha-\frac{1}{\alpha} \qquad 9.2.6$$

$\text{Coth}\,\alpha-\frac{1}{\alpha}$ কে 'লাঁজভাঁ অপেক্ষক' বা $L(\alpha)$ বলা হয়। α এর মান অতিক্ষুদ্র ($\alpha^2<<1$) হ'লে $L(\alpha)\simeq\frac{\alpha}{3}$ এবং বৃহৎ ($\alpha>>1$) হ'লে $L(\alpha)\simeq 1$ হয়। সেই অনুযায়ী m এর মান যথাক্রমে $\frac{1}{3}\frac{\mu^2F}{kT}$ এবং μ হয়। সাধারণ পরীক্ষার ক্ষেত্রে 'α' এর মান বিবেচনা ক'রে দেখা যাক। $300^\circ K$ উষ্ণতায় $\mu\simeq10^{-18}$ e.s.u. cm (HCl অণুর ক্ষেত্রে) ও $F=3000$ volt/cm হ'লে

$$\alpha \text{ বা } \frac{\mu F}{kT}=\frac{10^{-18}\times10}{1{\cdot}38\times10^{-16}\times300}\simeq2\times10^{-4}$$

অর্থাৎ $m = \frac{1}{3} \frac{\mu^2 F}{kT}$ লেখা সম্পূর্ণ যুক্তিযুক্ত।

দ্বিমেরুযুক্ত অণুর ক্ষেত্রেও স্থির আণবিক মেরুপ্রবণতা γ অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং মোট মেরুপ্রবণতার মান

$$\gamma_T = \gamma + \frac{m}{F}$$

$$= \gamma + \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{kT} \qquad 9.2.7$$

ক্লসিয়াস-মোসোটি সমীকরণ এখন এইভাবে লেখা যায়ঃ

$$P_0 = \frac{4\pi}{3} N_0 \gamma_T = \frac{4\pi}{3} N_0 \left(\gamma + \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{kT}\right) \qquad 9.2.8$$

P_0 রাশির উষ্ণতা-নির্ভরতার ব্যাখ্যা এখন সহজেই পাওয়া যায়। 9.2.8 সূত্র অনুসারে

$$P_0 T = \frac{4\pi}{3} N_0 \gamma T + \frac{4\pi}{9} \frac{N_0 \mu^2}{k}$$

অর্থাৎ কোন লেখচিত্রে $P_0 T$ রাশিকে নিরপেক্ষ উষ্ণতা T এর সংগে অঙ্কিত করলে এক সরলরেখা পাওয়া যাবে। উল্লম্ব অক্ষের যে অংশ এই সরলরেখার দ্বারা ছিন্ন হয় তার মান $\frac{4\pi}{9} \frac{N_0 \mu^2}{k}$; সুতরাং এই প্রক্রিয়ার দ্বারা অণুর দ্বিমেরুশক্তিও নির্ণয় করা যেতে পারে। NH_3, HCl, HBr, HI প্রভৃতি অণুর ক্ষেত্রে $P_0 T - T$ লেখ সত্যই সরলরেখা হয়। এই সকল অণুর দ্বিমেরুশক্তি μ এর মান পূর্বোক্ত উপায়ে নির্ণয় করলে দেখা যায় $\frac{\mu}{e}$ (e = ইলেকট্রনের আধান) এর মান 10^{-8} cm এর মত হয়। অর্থাৎ যদি ধরা যায় যে আণবিক দ্বিমেরু $-e$ ও $+e$ পরিমাণের দুই বৈদ্যুতিক আধানের দ্বারা উৎপন্ন হয় তবে ঐ দুই আধানের মধ্যে দূরত্ব 10^{-8} cm এর মত হবে। লক্ষ্যণীয় যে এই দূরত্ব অণুগুলির মধ্যে আন্তর্পরমাণুক (interatomic) দূরত্বের সমতুল্য।

যৌগের মধ্যে মেরুপ্রবণতা কেন পারমাণবিক মেরুপ্রবণতার যোগফলের সমান হয় না তাও সহজেই বোঝা যায়। অণুর মধ্যে বৈদ্যুতিক আধানের বিন্যাস, এবং সেইহেতু আণবিক দ্বিমেরুশক্তি অণুর গঠনবৈশিষ্ট্যের উপর নির্ভর করে। অণুর গঠনকালেই এই বিন্যাস পরিবর্তিত হয়, সুতরাং মেরু-

প্রবণতার যে অংশ স্থায়ী দ্বিমেরু থেকে উদ্ভূত সেটি অবশ্যই যোগফলের নিয়ম পালন করতে পারে না।

লোরেন্‌ৎস্-লোরেন্‌ৎস্ সমীকরণের ক্ষেত্রে স্থায়ী দ্বিমেরুর প্রভাবের জন্য কোন শুদ্ধির প্রয়োজন হয় না। আলোকতরঙ্গের সংগে সংশ্লিষ্ট বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র এত দ্রুত দিকপরিবর্তন করে যে কোন দ্বিমেরুবিশিষ্ট অণু সমলয়ে ঘুরতে পারে না। সুতরাং সাধারণভাবে 9.2.5 সূত্রই সত্য হয়। অবশ্য যদি আলোকতরঙ্গের কম্পাঙ্ক অণুর বৈদ্যুতিক আধানের কোন স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান বা নিকটবর্তী হয় তবে ঐ কম্পনের অনুনাদ (resonance) ঘটে এবং লোরেন্‌ৎস্-লোরেন্‌ৎস্ সমীকরণও আর প্রয়োগ করা যায় না।

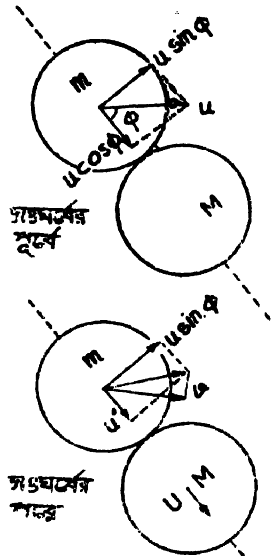
৯.৩ গ্যাসীয় আয়নের সচলতা ও ব্যাপনাংক

গ্যাসের মধ্যে বিদ্যুৎ পরিবাহিত হয় গতিশীল ইলেকট্রন এবং আহিত অণু বা আয়নের দ্বারা। আয়ন ও ইলেকট্রনের গতিবিধি নির্ণয় করতে গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের প্রয়োগ অপরিহার্য। বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের উপস্থিতিতে গ্যাসীয় আয়নের ত্বরণ ঘটে কিন্তু অন্যান্য অণুর সংগে সংঘর্ষের ফলে ঐ আয়ন নিয়তই ভরবেগ হারাতে থাকে। ফলে আয়নগুলির বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র অভিমুখে এক স্থির যৌথ গতিবেগ উদ্ভূত হয়। এই যৌথ গতিবেগ বৈদ্যুতিক শক্তির এক বিস্তৃত সীমার মধ্যে ঐ শক্তির সমানুপাতী থাকে। বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের প্রতি একক শক্তির জন্য কোন আয়নসমষ্টির যৌথ গতিবেগকে ঐ আয়নের **সচলতা** (mobility) বলে। গ্যাস অণুর মত গ্যাসের যে কোনও ধরণের আয়নও ব্যাপনের দ্বারা বিস্তৃত হয়। আয়নের ব্যাপনাংক সচলতার উপর নির্ভরশীল। বর্তমান অংশে আণবিক তত্ত্বের সাহায্যে আয়নের সচলতা ও ব্যাপনাংকের মান নির্ণয় করা হবে।

আয়নের সচলতার মান লাঁজভাঁ (1903-05) ও মেয়ারের (Mayer, 1920) পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যেতে পারে। ধরা যাক কোনও প্রকার আয়নের ভর m ও বৈদ্যুতিক আধান e। বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের মধ্যে চলার সময় এই আয়নের M-ভরবিশিষ্ট অণুর সংগে সংঘর্ষ হয়। আয়ন ও অণু উভয়ই গোলাকার এবং তাদের সংঘর্ষ সম্পূর্ণরূপে স্থিতিস্থাপক।

গণনার সুবিধার জন্য এমন এক নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করা যাক যেখানে সংঘর্ষের পূর্বে অণুর গতিবেগ শূন্য এবং আয়নের গতিবেগ u। অর্থাৎ u অণুর তুলনায় আয়নের আপেক্ষিক গতিবেগ। সংঘর্ষের মুহূর্তে দুই অণুর কেন্দ্রদ্বয়

ও স্পর্শবিন্দু যে সরলরেখায় থাকে তাকে সংঘর্ষরেখা বলা হবে (চিত্র ৯.১)। u ও সংঘর্ষরেখার মধ্যে কোণ যদি ϕ হয় তবে সংঘর্ষের ফলে u এর অভিলম্ব উপাংশ '$u \cos\phi$' এরই পরিবর্তন ঘটে, স্পার্শক উপাংশ '$u \sin\phi$' এর



চিত্র ৯.১

পরিবর্তন হয় না। ধরা যাক্, সংঘর্ষের পর আয়নের গতিবেগের অভিলম্ব উপাংশের মান u' হয়। সংঘর্ষের ফলে অণু যে গতিবেগ লাভ করে তা সংঘর্ষরেখা অভিমুখী হয়। ধরা যাক এই গতিবেগের মান U।

ভরবেগ ও গতীয় শক্তির নিত্যতা থেকে পাওয়া যায়

$$\left.\begin{aligned} mu\cos\phi &= mu' + MU \\ \tfrac{1}{2}m(u\cos\phi)^2 &= \tfrac{1}{2}mu'^2 + \tfrac{1}{2}MU^2 \end{aligned}\right\} \quad 9.3.1$$

9.3.1 সমীকরণদ্বয় থেকে পাওয়া যায়

$$u' = \frac{m - M}{m + M}\, u\cos\phi \qquad 9.3.2$$

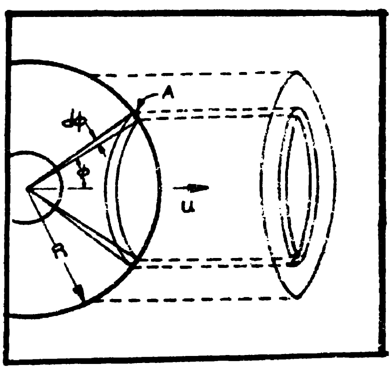
(সমীকরণের সমাধানে u' এর অপর মান পাওয়া যায় $u\cos\phi$; এই সমাধান উপেক্ষণীয়, কেননা সেক্ষেত্রে সংঘর্ষ ঘটেনি ব'লে ধরে নেওয়া যায়।)

সংঘর্ষের পর আয়নের গতিবেগের দিক ও পরিমাণের পরিবর্তন ঘটে। পূর্বের গতিবেগের দিক অভিমুখে পরিবর্তিত গতিবেগের উপাংশ

$$v = u \sin\phi \,.\, \sin\phi + \frac{m-M}{m+M} u \cos\phi \cdot \cos\phi$$

$$= u \left[\sin^2\phi + \frac{m-M}{m+M} \cos^2\phi \right]$$

ϕ এর বিভিন্ন মানের জন্য এই উপাংশের গড় মান নির্ণয় করতে হ'লে ϕ এর মান নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা জানা প্রয়োজন। ধরা যাক অণু ও আয়নের ব্যাসার্ধের যোগফল R। আয়নের প্রভাবগোলকের ব্যাসার্ধও এক্ষেত্রে R হবে। ধরা যাক এই প্রভাবগোলক u গতিতে অগ্রসর হয় ও সংঘর্ষের মুহূর্তে অণুর কেন্দ্র A বিন্দুতে এই প্রভাবগোলককে স্পর্শ করে (চিত্র ৯.২)। ϕ এর মান ϕ ও $\phi + d\phi$ সীমার মধ্যে অবস্থিত হ'লে A



চিত্র ৯.২

বিন্দু গোলকের উপর $2\pi R^2 \sin\phi \, d\phi$ ক্ষেত্রফলের উপর অবস্থিত হবে। u এর উপর উল্লম্ব তলে এই ক্ষেত্রফলের অভিক্ষেপ $2\pi R^2 \sin\phi \cos\phi \, d\phi$। একই তলে সমগ্র গোলকের ক্ষেত্রফলের অভিক্ষেপ πR^2। যেহেতু অণুর কেন্দ্র আয়নের প্রভাব গোলকের দ্বারা অতিক্রান্ত আয়তনের যে কোনও বিন্দুতে অবস্থিত হওয়ার সম্ভাব্যতা সমান, ϕ এর মান উল্লিখিত সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা

$$\frac{2\pi R^2 \sin\phi \cos\phi \, d\phi}{\pi R^2} = 2 \sin\phi \cos\phi \, d\phi \qquad 9.3.3$$

পূর্বোক্ত উপাংশ v এর গড় মান

$$\bar{v} = \int_0^{\pi/2} u\left[\sin^2\phi + \frac{m-M}{m+M}\cos^2\phi\right] 2\sin\phi\cos\phi\, d\phi$$

$$\frac{m}{m+M}..$$

গড়ে প্রতি সংঘর্ষে আয়নের গতিবেগের যে অংশ হ্রাস হয় তার মান

$$u - \bar{v} = \frac{M}{m+M} \cdot u \qquad 9.3.4$$

এখন ধরা যাক সংঘর্ষমান আয়নের গতিবেগ উপাংশ c_x, c_y, c_z এবং অণুর গতিবেগ উপাংশ C_x, C_y, C_z । x-অক্ষ অভিমুখে X শক্তির বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের প্রভাবে আয়নগুলির ঐ অক্ষ বরাবর এক যৌথ গতিবেগ w উৎপন্ন হয়। আয়নের গতিবেগ—উপাংশ সমূহের মান c_x ও $c_x + dc_x$, c_y ও $c_y + dc_y$ এবং c_z ও $c_z + dc_z$ সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা যদি df হয় তবে (4.3.11 সূত্র দ্রষ্টব্য)

$$df = \frac{1}{\alpha^3\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left[(c_x - w)^2 + c_y^2 + c_z^2\right]} dc_x dc_y dc_z \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\right)$$

সাধারণভাবে যৌথগতিবেগ w তাপজ গতিবেগের তুলনায় অতি ক্ষুদ্র। w^2 কে উপেক্ষা করলে লেখা যায়

$$df = \frac{1}{\alpha^3\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{\alpha^2}(c_x^2 + c_y^2 + c_x^2)} \left(1 + \frac{2c_x w}{\alpha^2}\right) dc_x dc_y dc_z \qquad 9.3.5$$

অণুর গতিবেগ উপাংশগুলি C_x ও $C_x + dC_x$, C_y ও $C_y + dC_y$ এবং C_z ও $C_z + dC_z$ এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা অনুরূপভাবে

$$dF = \frac{1}{\beta^3\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{\beta^2}(C_x^2 + C_y^2 + C_z^2)} dC_x dC_y dC_z \quad \left(\beta = \sqrt{\frac{2kT}{M}}\right)$$

9.3.6

অণু ও আয়নের গতিবেগ উক্তপ্রকার হ'লে অণুর তুলনায় আয়নের আপেক্ষিক গতিবেগ

$$c_r = [(c_x - C_x)^2 + (c_y - C_y)^2 + (c_z - C_z)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad 9.3.7$$

এবং একক সময়ে আয়নের সংঘর্ষের সংখ্যা $\pi R^2 \cdot ndF \cdot c_r$ (n = অণুর ঘনত্ব-সংখ্যা)। এখন 9.3.4 সূত্র অনুযায়ী প্রতি সংঘর্ষে গতিবেগের x-উপাংশের হ্রাসের মান

$$\frac{M}{m+M}(c_x - C_x)$$

[কেননা মোট আপেক্ষিক গতিবেগ c_r এর হ্রাস $\frac{M}{m+M} \cdot c_r$ এবং x-উপাংশের হ্রাস তার $\frac{c_x - C_x}{c_r}$ অংশ]

সুতরাং একক সময়ে আয়নের গতিবেগের x-উপাংশের গড় হ্রাস

$$\int\int \frac{M}{m+M}(c_x - C_x)\ \pi R^2 n c_r\ df\ dF$$

9.3.5 ও 9.3.6 সূত্রদ্বয় ব্যবহার করে* এই রাশির মান পাওয়া যায়

$$\frac{8w}{3\sqrt{\pi}}\pi R^2 n\alpha\sqrt{\frac{M}{m+M}}$$

কিন্তু X শক্তির বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রে আয়নের $\frac{Xe}{m}$ পরিমাণ ত্বরণ হয়। সুতরাং স্থির অবস্থায়, আয়নের যৌথগতিবেগ যখন w এর সমান,

$$\frac{Xe}{m} = \frac{8w}{3\sqrt{\pi}} \cdot \pi R^2 n\alpha\sqrt{\frac{M}{m+M}}\ ।$$

---

* সমাকলনের জন্য নিম্নলিখিত প্রতিস্থাপন (Substitution) প্রয়োজন :

$$c_x = X + \frac{M}{m+M}x, \quad c_y = Y + \frac{M}{m+M}y, \quad c_z = Z + \frac{M}{m+M}z,$$

$$C_x = X - \frac{m}{m+M}x, \quad C_y = Y - \frac{m}{m+M}y, \quad C_z = Z - \frac{m}{m+M}z \text{ ও}$$

$dc_x dc_y dc_z\ dC_x dC_y dC_z = dxdydzdXdYdZ$ ।

এখন $c_x - C_x = x$ ইত্যাদি, $\frac{c_x^2}{\alpha^2} + \frac{C_x^2}{\beta^2} = \frac{1}{2kT}\left[(m+M)X^2 + \left(\frac{mM}{m+M}\right)x^2\right]$ ইত্যাদি লিখে যে রাশিমালা পাওয়া যাবে তার মধ্যে গোলীয় নির্দেশাংকে $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta\cos\phi$, $z = r\sin\theta\sin\phi$, $X = R\cos\theta'$, $Y = R\sin\theta'\cos\phi$, $Z = R\sin\theta'\sin\phi'$, $dxdydz = 2\pi r^2\sin\theta\ d\theta\ dr$, $dXdYdZ = 2\pi R^2\sin\theta'\ d\theta'\ dR$ প্রতিস্থাপন করলে সমাকলনটির মান সহজেই নির্ণয় করা যাবে।

আয়নের গড় গতিবেগ $\bar{c} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$, গড় অবাধপথ $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi R^2 n}$ অর্থাৎ

$$\frac{Xe}{m} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{w\bar{c}}{\lambda}\sqrt{\frac{M}{m+M}} \qquad 9.3.8$$

আয়নের সচলতা, K, সংজ্ঞানুসারে $\frac{w}{X}$ এর সমান। সুতরাং

$$K = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\lambda e}{m\bar{c}} \sqrt{\frac{m+M}{M}} \qquad 9.3.9a$$

9.3.9a সূত্র অণুর গড় গতিবেগের মাধ্যমেও প্রকাশ করা যায়। অণুর গড় গতিবেগ $\bar{C}$ হ'লে $m\bar{c}^2 = M\bar{C}^2$। এই সমীকরণের সাহায্যে লেখা যায়

$$K = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\lambda e}{M\bar{C}} \sqrt{\frac{m+M}{m}} \qquad 9.3.9b$$

9.3.9 সূত্রদ্বয় থেকে আয়নের সচলতার মান নির্ণয় করা যেতে পারে। অথবা, সচলতার মান পরীক্ষার দ্বারা নির্ণীত হ'লে তার থেকে আয়নের গড় অবাধ পথের মান জানা যেতে পারে।

আয়নের ব্যাপনাংক ঃ বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের মধ্যে আয়নের যে সামগ্রিক গতি উৎপন্ন হয় সেটিকে এখন একপ্রকার ব্যাপন হিসাবেও দেখা যেতে পারে। ধরা যাক আয়নের ঘনত্বসংখ্যা n এবং ব্যাপনাংক D। ব্যাপনাংকের সংজ্ঞানুযায়ী x-অক্ষের উপর অভিলম্ব এরূপ একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত আয়নের সংখ্যা $-D\frac{dn}{dx}$। x-অক্ষ অভিমুখে আয়নের যৌথ গতিবেগ w হ'লে এই সংখ্যা nw এর সমান। সুতরাং

$$w = -\frac{D}{n} \cdot \frac{dn}{dx} \qquad 9.3.10$$

আয়নের আংশিক চাপ p কে ঘনত্বসংখ্যার সমানুপাতী ব'লে ধরা যেতে পারে। অবশ্য আয়নের অধিক ঘনত্বে পারস্পরিক বিকর্ষণ হেতু চাপ অপেক্ষাকৃত অধিক হয়। তবে সাধারণতঃ পরীক্ষাগারে এই ঘনত্বসংখ্যা $10^6/cm^3$ এর অধিক হয় না এবং আয়নের বিকর্ষণের প্রভাব উপেক্ষা করা যেতে পারে।

p ও n সমানুপাতী হ'লে

$$\frac{dp}{p} = \frac{dn}{n}$$

অর্থাৎ
$$w = -\frac{D}{p} \cdot \frac{dp}{dx} \qquad 9.3.11$$

w পরিমাণ যৌথ গতিবেগ সৃষ্টি করতে প্রতি আয়নের উপর কার্যকরী বল

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{dp}{dx}=\frac{pw}{Dn} \qquad 9.3.12$$

সমপরিমাণ যৌথ গতিবেগ সৃষ্টির জন্য প্রয়োজনীয় বৈদ্যুতিক বল Xe এর মান 9.3.8 সূত্র থেকে জানা যায়। এই মান 9.3.12 সমীকরণের কার্যকরী বলের সমান, সুতরাং

$$D=\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{p\lambda}{nm\bar{c}}\sqrt{\frac{m+M}{M}}$$

$$=\frac{3\pi}{16\sqrt{2}}\lambda\bar{c}\sqrt{\frac{m+M}{M}} \quad \left[\because\ p=\frac{\pi}{8}\ nm(\bar{c})^2\right] \qquad 9.3.13$$

আয়ন ও অণুর ভর সমান, অর্থাৎ $m=M$ হ'লে 9.3.13 সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$D=0{\cdot}589\lambda c \qquad 9.3.14$$

5.6.6 সূত্রে n_A (অণু) $=n$, n_B (আয়ন) $<<n$ ধরলে ব্যাপনাংকের মান $\frac{1}{3}\lambda\bar{c}$ পাওয়া যায়। এই মান 9.3.14 সূত্রের মানের সংগে তুলনীয়।

আয়নের সচলতা ও ব্যাপনাংক পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। 9.3.9a ও 9.3.13 সূত্রদ্বয় থেকে

$$\frac{K}{D}=\frac{ne}{p}=\frac{e}{kT}. \qquad 9.3.15$$

শেষোক্ত সূত্রের সুবিধা এই যে K ও D এর পরীক্ষালব্ধ মানের সাহায্যে সহজেই এই সূত্রের সত্যতা নির্ধারণ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, 0°C উষ্ণতায় বায়ুতে ঋণাত্মক আধানবিশিষ্ট আয়নের সচলতা ও ব্যাপনাংকের মান যথাক্রমে 1·8 cm sec^{-1}/volt cm^{-1} এবং 0·043 cm^2 sec^{-1}। অতএব $\frac{K}{D}=42$ volt^{-1}।

অপরপক্ষে এই উষ্ণতায়

$$\frac{e}{kT}=\frac{1{\cdot}60\times10^{-19}\text{ coul.}}{1{\cdot}38\times10^{-23}\times273\text{ Joule}}=42{\cdot}5\text{ volt}^{-1}$$

দুই রাশির সমতা 9.3.15 সূত্রের সত্যতা প্রমাণিত করে। সেই সংগে আয়নের ব্যাপনসংক্রান্ত আলোচনার যাথার্থ্যও প্রতিপন্ন হয় এবং দেখা যায় যে সাধারণ গ্যাসের মতই আয়নের ক্ষেত্রেও আংশিক চাপের কল্পনা অযৌক্তিক নয়।

সচলতা ও ব্যাপনাংকের পরীক্ষালব্ধ মান থেকে দেখা যায় যে আয়নের গড় অবাধপথ সমতুল্য অণুর গড় অবাধপথ অপেক্ষা হ্রস্ব। গড়

অবাধপথের উপর আয়নের বৈদ্যুতিক আধানের প্রভাব দুইভাবে পড়ে। প্রথমতঃ আয়নের পথের নিকটবর্তী অঞ্চলে অবস্থিত কোন অণু তার স্বাভাবিক অথবা আয়নের দ্বারা আবিষ্ট দ্বিমেরুশক্তির ফলে আয়নের দ্বারা আকৃষ্ট হ'তে পারে। এরূপ ক্ষেত্রে প্রকৃত সংঘর্ষ না ঘটলেও আয়ন ও ঐ অণুর মধ্যে শক্তি ও ভরবেগের আদানপ্রদান ঘটে এবং আয়ন পূর্বের গতিপথ থেকে বিচ্যুত হয়। দ্বিতীয়তঃ, আয়নের বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রে নিকটবর্তী অণুগুলি আকৃষ্ট ও আয়নের সংগে সংশ্লিষ্ট হয়। এই প্রকারে ক্রমশঃ আয়ন ও অণুর এক গুচ্ছ সৃষ্ট হয়, যার আকার ও ভর, উভয়ই শুধুমাত্র আয়ন অপেক্ষা অনেক বেশী। বর্ধিত আকারের ফলে আয়নের গড় অবাধপথ স্বতঃই হ্রাস পায়। আলোচিত দুই প্রক্রিয়ার তুলনামূলক গুরুত্ব অবশ্যই আয়ন ও গ্যাসের প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল।

৯.৪ আয়নের পুনর্মিলন

এক্স্ রশ্মি বা অন্য কোন বিকিরণ দ্বারা কোনও গ্যাসকে আয়নিত করলে গ্যাসের মধ্যে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আধানবিশিষ্ট (অথবা পজিটিভ ও নেগেটিভ) আয়ন যুগ্মভাবে ও সমসংখ্যায় উৎপন্ন হয়। উৎপাদনের সংগে সংগেই বিপরীত আধানবিশিষ্ট আয়নের পারস্পরিক আকর্ষণের ফলে সেগুলি পুনরায় মিলিত হয়, ফলে যদি আয়নীকরণ (ionisation) অবিচ্ছিন্নভাবে চালু না থাকে তবে উভয়প্রকার আয়নের ঘনত্বসংখ্যা ক্রমশঃ কমতে থাকে। n_+ ও n_- দ্বারা যথাক্রমে পজিটিভ ও নেগেটিভ আয়নের ঘনত্বসংখ্যা নির্দেশিত করা যাক। গ্যাসের আয়তনের মধ্যে উভয়প্রকার আয়ন যদি সর্বদা সম্পূর্ণ বিশৃঙ্খল-ভাবে বণ্টিত থাকে তবে পুনর্মিলনের ফলে ঘনত্বসংখ্যা কমার হার

$$-\frac{dn_+}{dt} = -\frac{dn_-}{dt} = \alpha n_+ n_- \qquad 9.4.1a$$

অথবা যেহেতু $n_+ = n_- = n,\ -\frac{dn}{dt} = \alpha n^2$ 9.4.1b

এখানে α সমানুপাত ধ্রুবক। প্রাথমিক আলোচনায় কল্পনা করা যেতে পারে যে এই ধ্রুবকের মান সময়ের সংগে অপরিবর্তিত থাকে। α ধ্রুবককে **'পুনর্মিলনাংক'** (recombination coefficient) নামে অভিহিত করা হয়। যদি t_1 ও t_2 এই দুই সময়ে আয়নের ঘনত্বসংখ্যা বা n এর মান যথাক্রমে n_1 ও n_2 হয় তবে 9.4.1b সূত্রের সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} = \alpha(t_2 - t_1) \qquad 9.4.2$$

এই সূত্রের সাহায্যে আয়নীকরণের পর বিভিন্ন সময়ে 'n' এর মান থেকে পুনর্মিলনাংকের মান নির্ণয় করা যায়।

সূক্ষ্মভাবে পরীক্ষা করলে দেখা যায় যে α এর মান আয়নীকরণের অব্যবহিত পরে অপেক্ষাকৃত অধিক থাকে। 'α' বা পুনর্মিলনাংকের সময়ের সংগে পরিবর্তনের কারণ সহজেই উপলব্ধি করা যায়। আয়নের বণ্টন যখন সম্পূর্ণ বিশৃঙ্খল (random) থাকে কেবল তখনই α এর স্থির মান আশা করা যায়। কিন্তু আয়নীকরণের ঠিক পরেই অনেক আয়নযুগ্ম পরস্পরের অতি নিকটে থাকে। এগুলির যখন পুনর্মিলন ঘটে 'α' এর মান তখন অধিক ব'লে মনে হয়। আয়নীকরণ বন্ধ থাকলে ব্যাপনের জন্য আয়নযুগ্মের মধ্যে দূরত্ব ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়। ফলে ক্রমশঃ বিশৃঙ্খল অবস্থা প্রতিষ্ঠিত হয় এবং পুনর্মিলনাংকের মানও স্থিতিশীল হয়।

পুনর্মিলনাংকের প্রকৃত তাৎপর্য্য টমসনের (J. J. Thomson, 1924) তত্ত্বে পরিস্ফুট হয়। টমসনের ধারণা অনুযায়ী দুইটি বিপরীত আধানযুক্ত আয়নের মিলন তখনই ঘটে যখন আয়ন দুইটি পরস্পরের চতুর্দিকে উপবৃত্তাকার কক্ষপথে বিচরণ করে, অর্থাৎ আয়নযুগ্মের মোট শক্তি ঋণাত্মক হয়। প্রতি আয়নই গ্যাসের অভ্যন্তরস্থ তাপজ গতিতে অংশগ্রহণ করে, সুতরাং কোন সংঘর্ষের পরেই আয়নের গতীয় শক্তি গড়ে $\frac{3}{2}kT$ হয়। তবে সংঘর্ষের পর কোন বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রে ত্বরিত হ'য়ে এই গতীয় শক্তি বৃদ্ধি পেতে পারে। দুই আয়নের আধান e, $-e$ হ'লে এবং তাদের মধ্যে দূরত্ব d হ'লে পারস্পারিক আকর্ষণ হেতু স্থৈতিক শক্তির মান $-\frac{e^2}{d}$ হয়। অর্থাৎ $e^2/\frac{3}{2}kT$ অপেক্ষা অল্প দূরত্বে দুই বিপরীত আধানের আয়ন অবস্থিত হলে এবং সেই অবস্থায় কোন সংঘর্ষের ফলে অন্ততঃ একটির গতীয় শক্তি $\frac{3}{2}kT$ তে উপনীত হ'লে আয়নযুগ্মের মোট শক্তি ঋণাত্মক হবে। এর থেকে বোঝা যায় যে পুনর্মিলনের জন্য একটি আয়নের বিপরীত আধানের কোন আয়নের থেকে $e^2/\frac{3}{2}kT$ দূরত্বের মধ্যে এক সংঘর্ষ হওয়া প্রয়োজন। ধরা যাক $d=e^2/\frac{3}{2}kT$। এছাড়া, পজিটিভ ও নেগেটিভ আয়নের জন্য যথাক্রমে

n_+ ও n_- = আয়নের ঘনত্বসংখ্যা

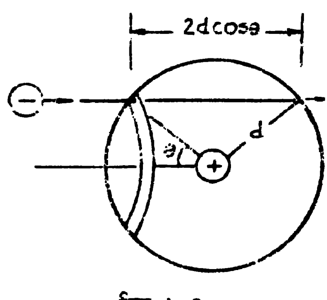
c_+ ও c_- = আয়নের মূল গড় বর্গবেগ

λ_+ ও λ_- = গ্যাসের মধ্যে গড় অবাধপথ

w_+ ও w_- = বিপরীত আধানের আয়নের d দূরত্বের মধ্যে কোন গ্যাস-অণুর সংগে সংঘর্ষের সম্ভাব্যতা।

নেগেটিভ আয়নের তুলনায় পজিটিভ আয়নের আপেক্ষিক গতিবেগের মূল গড় বর্গ মান $\sqrt{c_+^2+c_-^2}$ । এখন d ব্যাসার্ধের এক গোলক, যার কেন্দ্রে কোন একটি পজিটিভ আয়ন অবস্থিত, একক সময়ে $\pi d^2\sqrt{c_+^2+c_-^2}$ আয়তনের মধ্যে মোট $\pi d^2 n_-\sqrt{c_+^2+c_-^2}$ সংখ্যক নেগেটিভ আয়নকে অতিক্রম করে। একক আয়তনে ও একক সময়ে, মোট n_+ সংখ্যক পজিটিভ আয়নের হিসাব করলে, মোট $\pi d^2 n_+ n_-\sqrt{c_+^2+c_-^2}$ সংখ্যক নেগেটিভ আয়ন কোন এক পজিটিভ আয়নের d দূরত্বের মধ্যে আসে।

এর পরের সমস্যা পজিটিভ আয়নের d দূরত্বের মধ্যে নেগেটিভ আয়ন ও অণুর সংঘর্ষের সম্ভাব্যতা নির্ণয়। পজিটিভ আয়নকে এখন স্থির ধরা যাক। নেগেটিভ আয়নের গতিবেগ এখন পূর্বের বিপরীত দিকে $\sqrt{c_+^2+c_-^2}$ হবে। দুই আয়নের আকর্ষণ হেতু নেগেটিভ আয়নের গতিপথ কিছুটা বক্র হবে তবে উপস্থিত এই বক্রতা উপেক্ষা করা হবে। পজিটিভ আয়নকে কেন্দ্র ক'রে অঙ্কিত d ব্যাসার্ধের এক গোলক কল্পনা করা যাক (চিত্র ৯.৩)। নেগেটিভ আয়নের গতিবেগ ও ঐ আয়নের গোলকে প্রবেশবিন্দুতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধের মধ্যে কোণ θ। নেগেটিভ আয়নের পথের $2d\cos\theta$ দৈর্ঘ্য গোলকের মধ্যে অবস্থিত হয়। এই দৈর্ঘ্যের মধ্যে নেগেটিভ আয়নের সংঘর্ষের সম্ভাব্যতা $(1-e^{-2d\cos\theta/\lambda_-})$।



চিত্র ৯.৩

θ কোণের θ ও $\theta+d\theta$ সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা (9.3.3 সূত্রানুযায়ী) $2\sin\theta\cos\theta d\theta$। সুতরাং θএর বিভিন্ন মানের জন্য গোলকের মধ্যে নেগেটিভ আয়নের সংঘর্ষের গড় সম্ভাব্যতা বা

$$w_-=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(1-e^{-\frac{2d\cos\theta}{\lambda_-}}\right)2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=1-\frac{\lambda_-^2}{2d^2}\left[1-\left(\frac{2d}{\lambda_-}+1\right)e^{-\frac{2d}{\lambda_-}}\right] \qquad 9.4.3\,a$$

অনুরূপভাবে, $$w_+=1-\frac{\lambda_+^2}{2d^2}\left[1-\left(\frac{2d}{\lambda_+}+1\right)e^{-\frac{2d}{\lambda_+}}\right] \qquad 9.4.3\,b$$

পরস্পরের d দূরত্বের মধ্যে পজিটিভ ও নেগেটিভ আয়নের অন্ততঃ একটির সংঘর্ষের সম্ভাব্যতা

$$1-(1-w_-)(1-w_+)=w_-+w_+-w_-w_+$$

অতএব একক সময়ে একক আয়তনে মোট

$$\pi d^2 n_+ n_- \sqrt{c_+^2+c_-^2}\,(w_-+w_+-w_-w_+)$$

সংখ্যক পুনর্মিলন ঘটে। পুনর্মিলনাংকের সংজ্ঞা (9.4.1 a) অনুযায়ী

$$\alpha=\pi d^2\sqrt{c_+^2+c_-^2}\,(w_-+w_+-w_-w_+) \qquad 9.4.4$$

এরূপ মতবাদও প্রচলিত আছে যে পরস্পরের d দূরত্বের মধ্যে উভয় আয়নেরই সংঘর্ষ হওয়া প্রয়োজন কেননা দুই আয়নের পুনর্মিলন আয়নযুগ্মের ভরকেন্দ্রিক নির্দেশাংকে মোট গতীয় শক্তির উপর নির্ভর করে। উভয় আয়নের যুগপৎ সংঘর্ষের সম্ভাব্যতা w_-w_+, সুতরাং এই মত অনুযায়ী পুনর্মিলনাংকের মান

$$\alpha'=\pi d^2\sqrt{c_+^2+c_-^2}\,w_-w_+ \qquad 9.4.5$$

বিভিন্ন চাপ ও উষ্ণতায় বায়ুর মধ্যে আয়নের পুনর্মিলনাংকের মানের সংগে টমসনের সূত্র থেকে নির্ণীত মানের, বিশেষতঃ α' এর কিছুটা পরিমাণগত সঙ্গতি দেখা যায়। তবে এই ধরণের পরীক্ষার সূক্ষ্মতা অতি সীমিত—বিশেষতঃ বায়ুর মত গ্যাসের মিশ্রণের ক্ষেত্রে পরীক্ষালব্ধ ফলের প্রকৃত তাৎপর্য অনুধাবন করা যায় না। উপরন্তু টমসনের গণনাপদ্ধতি যুক্তিপূর্ণ হ'লেও সর্বতোভাবে নিখুঁত নয়। এই কারণে টমসনের তত্ত্বের কোন সূক্ষ্ম প্রতিপাদনের আশা করা যায় না।

দশম অধ্যায়

পদার্থের আণবিক পরিসংখ্যান

১০.১ আণবিক পরিসংখ্যানের প্রয়োজনীয়তা

গ্যাসের প্রচলিত আণবিক তত্ত্বের মূল উদ্দেশ্য অণুর পারস্পরিক বলের প্রভাবে গ্যাস-অণুর গতিবিধির বিশ্লেষণ। বিস্তৃত প্রয়োগক্ষেত্রে এই প্রকার বিশ্লেষণে আণবিক তত্ত্ব যথেষ্ট সাফল্যলাভ করেছে। তবে এ কথাও অনস্বীকার্য যে আণবিক তত্ত্বে ব্যবহৃত পদ্ধতির ক্ষমতা সীমিত। তার কারণ দ্বিবিধ ঃ

(ক) বিভিন্ন প্রকার অণুর পারস্পরিক বলের প্রকৃতি সম্পূর্ণরূপে জ্ঞাত নয়। এই বলের সম্পর্কে নানা গুণগত অঙ্গীকার মেনে নিতে হয় যার ফলে আণবিক তত্ত্বের বিশ্লেষণ ব্যাপকভাবে প্রযোজ্য হয় না। এমন কি এই বলের প্রকৃতি সঠিকভাবে জানা থাকলেও বিশালসংখ্যক অণুর ক্ষেত্রে প্রতিটির উপর অন্য সকল অণুর প্রযুক্ত বল-সমূহকে বিবেচনা ক'রে তার গতিবিশ্লেষণ এক অসম্ভব ব্যাপার। সর্বোপরি, সমগ্র গ্যাসের সমষ্টিগত আচরণ এবং এই আচরণ-সংক্রান্ত কয়েকটি রাশির গড় মানই (যথা চাপ, উষ্ণতা) পদার্থবিদ্যার উপজীব্য বিষয়। নির্দিষ্ট কোন অণুর গতিপ্রকৃতির পূর্ণ বিশ্লেষণ তাই শুধু অসম্ভব নয়, অপ্রয়োজনীয়ও বটে।

(খ) কেবলমাত্র বলবিদ্যার ব্যবহার দ্বারা গ্যাসের সর্বপ্রকার আচরণের ব্যাখ্যা দেওয়া সম্ভব নয়। কোন কোন ক্রিয়ার অপ্রত্যাবর্তনযোগ্যতা (irreversibility) অথবা তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের ব্যাখ্যা বলবিদ্যার আওতার সম্পূর্ণ বাইরে। বস্তুতঃ, এগুলির ব্যাখ্যা সম্পূর্ণ নির্ভর করে ঘটনার সম্ভাব্যতার উপর। উদাহরণ-স্বরূপ বলা যায় যে দুইটি পরস্পর সংযুক্ত আধারে যদি কোন গ্যাস থাকে তবে কোনও বিশেষ মুহূর্তে সমস্ত গ্যাস অণুই এক আধারে চলে আসতে পারে। অন্ততঃ এরূপ ঘটনা বলবিদ্যা অনুযায়ী অসম্ভব নয় এবং আণবিকতত্ত্ব এই ঘটনাকে 'সম্ভব' অভিহিত করেই ক্ষান্ত হয়। বাস্তবক্ষেত্রে এরূপ ঘটনা ঘটতে দেখা যায় না কেননা এরূপ ঘটনা অত্যন্ত অসম্ভাব্য।

এই সম্ভাব্যতা-অসম্ভাব্যতার বিচারই আণবিক পরিসংখ্যানের মূল কথা।

১০.২ বোল্‌ৎস্‌মান উপপাদ্য—অবিন্যস্ততা ও সম্ভাব্যতার সম্পর্ক

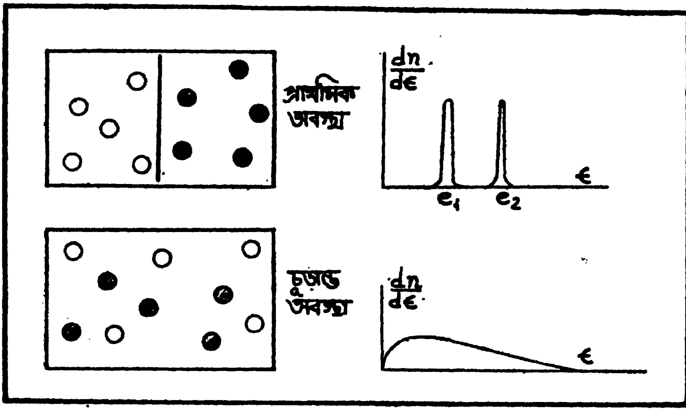
তাপগতিবিদ্যার অভিজ্ঞতা থেকে জানা যায় যে কোনও অবরুদ্ধ বস্তু-সমষ্টির অবিন্যস্ততা (entropy) কখনও কমানো যায় না। এরূপ বস্তুসমষ্টির মধ্যে কোনও প্রক্রিয়া যদি প্রত্যাবর্তক হয় তবে তার ক্ষেত্রে অবিন্যস্ততার পরিবর্তন $\triangle S=0$ হয়; সমস্ত অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়াতেই $\triangle S$ এর মান শূন্য অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। যখন এই অবিন্যস্ততা এক গরিষ্ঠ মান লাভ করে তখনই বস্তুসমষ্টি সাম্যাবস্থায় উপনীত হয়।

সমগ্র বিশ্বের (universe) অবিন্যস্ততার ক্ষেত্রেও একই কথা বলা চলে। যখনই কোন অপ্রত্যাবর্তক ঘটনা ঘটে—যথা তাপের উষ্ণ থেকে শীতল স্থানে প্রবাহ, গ্যাসের ব্যাপন, ঘর্ষণজনিত রোধের বিরুদ্ধে যান্ত্রিক শক্তির ব্যয়—তখনই বিশ্বের অবিন্যস্ততা বৃদ্ধি পায়। (বিশ্বের প্রতিটি ঘটনাই প্রকৃতপক্ষে অপ্রত্যাবর্তক; প্রত্যাবর্তক ঘটনা তাপগতিবিদ্যার পুস্তকের বাইরে ঘটে না।) বিশ্বের অবিন্যস্ততা এইভাবে নিয়তই বর্ধিত হয়।

এ পর্যন্ত আমরা গাণিতিক অবিন্যস্ততার কথা চিন্তা করলাম। বাস্তবক্ষেত্রে কোন বস্তুসমষ্টি স্বতঃই সুশৃঙ্খল অবস্থা থেকে অবিন্যস্ত বা বিশৃঙ্খল অবস্থায় উপনীত হয়। এই তথ্যের অনুশীলনের জন্য আমরা এক কল্পিত পরীক্ষা করব। মধ্যস্থলে বিভাজক বিশিষ্ট কোন অবরুদ্ধ আধারের দুই অংশে সমসংখ্যক দুই প্রকার আদর্শ গ্যাসের অণু ছাড়া যাক। প্রথম প্রকারের (সাদা) প্রতিটির গতীয় শক্তি e_1, দ্বিতীয় প্রকারের (কালো) ক্ষেত্রে e_2। বিভাজকটিকে এখন সরিয়ে নেওয়া যাক। দুই প্রকারের অণুই এখন সমগ্র আধারের মধ্যে ছড়িয়ে পড়বে। এছাড়া, দুই প্রকারের অণুর নিজেদের ও পরস্পরের মধ্যে সংঘর্ষের ফলে গতীয় শক্তির বিনিময় ঘটবে। ক্রমশঃ অণুগুলির গতীয় শক্তির বণ্টন পরিবর্তিত হ'য়ে এক চূড়ান্ত স্থিররূপ গ্রহণ করবে। ১০.১ চিত্রে গতীয় শক্তির প্রাথমিক ও চূড়ান্ত বণ্টন দেখানো হ'ল। অবস্থান ও গতীয় শক্তির বণ্টন—উভয় দিক দিয়েই অণুগুলি প্রাথমিক সুবিন্যস্ত অবস্থা থেকে চরম বিশৃঙ্খলায় পৌঁছায়।

অণুসমষ্টির ক্রমবর্ধমান বিশৃঙ্খলার কারণ বিভিন্ন অবস্থার আপেক্ষিক সম্ভাব্যতার মধ্যে নিহিত। গ্যাসের কোন বিশেষ অবস্থার এই সম্ভাব্যতার ব্যাখ্যা প্রয়োজন। ধরা যাক কোন গ্যাস N-সংখ্যক অণুর সমষ্টি। প্রতিটি

অণুর অবস্থা তিনটি অবস্থানসূচক (x, y, z) ও তিনটি ভরবেগ-উপাংশসূচক (p_x, p_y, p_z)—মোট এই ছয়টি রাশির দ্বারা নির্দেশ করা যায়।



চিত্র ১০.১

ছয়মাত্রার এক নির্দেশতন্ত্রে N-সংখ্যক বিন্দুর দ্বারা সমগ্র গ্যাসের অবস্থাই চিত্রিত হ'তে পারে।

ছয়মাত্রার এই আয়তনকে অণুর শক্তি ϵ অনুসারে বিভিন্ন কক্ষে ভাগ করা যায়। অণুর কোন বিশেষ বণ্টন ব্যবস্থায় $S_1, S_2, \ldots, S_j, \ldots$ প্রভৃতি কক্ষে অণুর সংখ্যা যথাক্রমে $n_1, n_2, \ldots n_j, \ldots$ এবং তাদের শক্তি যথাক্রমে $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \epsilon_j, \ldots$ ধরা যাক। অবশ্যই $\Sigma n_j = N$। অণুর এই বিশেষ প্রকার বিন্যাস যত উপায়ে হ'তে পারে তার সংখ্যা $W(n_1, n_2, \ldots n_j, \ldots)$। n_1, n_2 প্রভৃতি রাশির মানও বিভিন্ন হ'তে পারে এবং এইভাবে সকল প্রকার বিন্যাস মোট যত প্রকারে হ'তে পারে তার সংখ্যা $\Sigma W(n_1, n_2, \ldots n_j, \ldots)$। সুতরাং অণুর পূর্বোক্ত বিশেষ প্রকার বিন্যাসের গাণিতিক সম্ভাব্যতা

$$P(n_1, n_2, \ldots n_j, \ldots) = \frac{W(n_1, n_2, \ldots n_j, \ldots)}{\Sigma W(n_1, n_2, \ldots n_j, \ldots)} \qquad 10.2.1$$

লক্ষ্যণীয় যে P এবং W সমানুপাতী। P এর মান যখন সর্বাধিক হয়, তখন W এর মানও সর্বাধিক হয়। W রাশিকে আমরা 'বিন্যাসাঙ্ক' নামে অভিহিত করব।*

---

* W কে 'তাপগতিক সম্ভাব্যতা' (thermodynamic probability) ও বলা হয়।

পূর্বালোচিত অণুসমষ্টির বিভিন্ন স্থানাঙ্ক ও ভরবেগ-উপাংশসমূহের বিন্যাস এমনভাবে পরিবর্তিত হয় যাতে 'বিন্যাসাঙ্কে'র মান ক্রমশঃ এক গরিষ্ঠ মানের দিকে যেতে পারে। চূড়ান্ত অবস্থায় যখন এই বিন্যাসাঙ্ক সর্বাধিক মান লাভ করে তখন অণুসমষ্টি সাম্যাবস্থায় পৌঁছায় কেননা বিন্যাসাঙ্ক আর বাড়তে পারে না। বিন্যাসাঙ্কের এই বৃদ্ধিই অণুসমষ্টির বিশৃঙ্খলার বৃদ্ধিরূপে প্রতিভাত হয়।

দেখা গেল যে বস্তুর সাম্যাবস্থায় অবিন্যস্ততা S ও বিন্যাসাঙ্ক W উভয়ই সর্বাধিক হয়। S ও W এর মধ্যে এই কারণে এক অপেক্ষকীয় সম্পর্ক আশা করা যায়। ধরা যাক

$$S = f(W) \qquad 10.2.2$$

এই সম্পর্ক সূচিত করে। $f(W)$ এর প্রকৃতি নির্ণয় করা প্রয়োজন।

পরস্পর সম্পর্কহীন দুই বস্তুসমষ্টির অবিন্যস্ততার মান যথাক্রমে S_1 ও S_2 এবং বিন্যাসাঙ্ক যথাক্রমে W_1 ও W_2 ধরা যাক। দুই বস্তুসমষ্টিকে যদি একটি সমষ্টিরূপেই কল্পনা করা যায় তবে ঐ বস্তুসমষ্টির মোট বিন্যাসাঙ্ক হবে $W = W_1 W_2$ এবং মোট অবিন্যস্ততার মান হবে $S = S_1 + S_2$। 10.2.2 অনুযায়ী

$$f(W) = f(W_1 W_2) = f(W_1) + f(W_2) \qquad 10.2.3$$

শেষোক্ত সূত্র থেকেই $f(W)$ এর প্রকৃতি নির্ণয় করা যায়। 10.2.3 সূত্রের উভয় পার্শ্বকে যথাক্রমে W_1 ও W_2 দ্বারা অন্তরকলিত (differentiate) করলে পাওয়া যায়ঃ

$$W_2 \frac{df(W_1 W_2)}{d(W_1 W_2)} = \frac{df(W_1)}{dW_1}$$

এবং $$W_1 \frac{df(W_1 W_2)}{d(W_1 W_2)} = \frac{df(W_2)}{dW_2}$$

অথবা $$W_1 \frac{df(W_1)}{dW_1} = W_2 \frac{df(W_2)}{dW_2} = W_1 W_2 \frac{df(W_1 W_2)}{d(W_1 W_2)}।$$

এর থেকে স্পষ্ট হয় যে প্রত্যেক বস্তুসমষ্টির ক্ষেত্রেই $W \frac{df(W)}{dW}$ এক ধ্রুবরাশি।

এই ধ্রুবরাশির মান C ধরলে সমাকলনের দ্বারা পাওয়া যায়

$$f(W) \text{ বা } S = C \ln W + C' \qquad 10.2.4$$

C ও C' উভয়ই ধ্রুবরাশি হ'লেও C' এর মান বিভিন্ন বস্তুসমষ্টির ক্ষেত্রে বিভিন্ন হ'তে পারে। C এর মান সর্বক্ষেত্রেই এক এবং নিম্নবর্ণিত উপায়ে সহজেই নির্ণয় করা যায়।

ধরা যাক কোন গ্যাসের আয়তন V, অবিন্যস্ততা S এবং বিন্যাসাঙ্ক W। গ্যাসের যে কোনও অণুর অপেক্ষাকৃত স্বল্প আয়তন $V-\Delta V$ ($\Delta V << V$) এর মধ্যে অবস্থিত হওয়ার সম্ভাব্যতা $1-\frac{\Delta V}{V}$। অণুর মোট সংখ্যা N হ'লে প্রত্যেক অণুর একই সংগে $V-\Delta V$ আয়তনে অবস্থিত হওয়ার সম্ভাব্যতা $\left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)^N$। এই অবস্থায় গ্যাসের উষ্ণতা এক থাকলেও অবিন্যস্ততা ও বিন্যাসাঙ্কের মান ক'মে যথাক্রমে $S-\Delta S$ ও $W-\Delta W$ হয়। যেহেতু বিন্যাসাঙ্কের বিভিন্নতা কেবলমাত্র অণুসমূহের অবস্থানের তারতম্যের জন্যই ঘটে, অতএব

$$\frac{W-\Delta W}{W}=\left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)^N.$$

অথবা $$\frac{\Delta W}{W}=N\frac{\Delta V}{V}$$

10.2.4 সূত্র থেকে $\Delta S=C\frac{\Delta W}{W}=CN\frac{\Delta V}{V}$

অর্থাৎ $$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\frac{CN}{V} \qquad 10.2\ 5$$

এখানে যে প্রকার গ্যাসের কল্পনা করা হ'য়েছে তা প্রকৃতপক্ষে আদর্শ গ্যাস। সুতরাং এক্ষেত্রে

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\frac{p}{T} \quad (p=\text{চাপ}) \qquad 10.2.6$$

10.2.5 ও 10.2.6 থেকে পাওয়া যায় $pV=CNT$। এই সূত্র আদর্শ গ্যাসের সূত্র $pV=NkT$ এর সংগে তুলনা করলে দেখা যায় $C=k$, বোল্‌ৎস্‌মান ধ্রুবক। 10.2.4 সূত্রকে এখন লেখা যেতে পারে

$$S=k\ln W+C' \qquad 10.2.7$$

10.2.7 সূত্র 'বোল্‌ৎস্‌মান উপপাদ্য' রূপে পরিচিত। এই সূত্রের সাহায্যে বস্তু-সমষ্টির কোনও নির্দিষ্ট অবস্থায় অবিন্যস্ততার মান সুনিশ্চিতরূপে জানা যায় না; তবে দুই অবস্থায় অবিন্যস্ততার মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করা যায়। প্লাঙ্ক (Planck) 10.2.7 সূত্রে C' ধ্রুবকের মান শূন্য কল্পনা করেন। এই মত অনুযায়ী লেখা যেতে পারে

$$S=k\ln W \qquad 10.2.8$$

১০.৩ প্রাক্-কণিকাবাদী ও কণিকাবাদী বণ্টনসূত্র

সাম্যাবস্থায় কোন কণিকাসমষ্টির গাণিতিক সম্ভাব্যতা P এবং সেইহেতু বিন্যাসাঙ্ক W গরিষ্ঠ মান লাভ করে—এই সত্যের সাহায্যে বিভিন্ন প্রকৃতির কণিকার বণ্টনসূত্র নির্ণয় করা যায়। প্রাক্-কণিকাবাদ যুগে গ্যাসের অণুর ক্ষেত্রে W এর মান নির্ণয়ের জন্য ধ'রে নেওয়া হ'ত যে অণুগুলিকে পরস্পরের থেকে আলাদা ক'রে চেনা যায়। সেই সংগে শক্তির দুই নির্দিষ্ট সীমা ϵ ও $\epsilon+d\epsilon$ এর মধ্যে যে সংখ্যক অণু থাকতে পারে তার কোন উর্ধ্ব সীমা কল্পনা করা হ'ত না। দেখা যাবে এই ধারণা অনুযায়ী যে প্রাক্-কণিকাবাদ বণ্টনসূত্র পাওয়া যাবে তা প্রকৃতপক্ষে পূর্বনির্ণীত ম্যাক্সওয়েল—বোল্ৎস্মান সূত্র। এই সূত্র সাধারণ গ্যাস অণুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হ'লেও আলোককণিকা বা পরিবাহীর মধ্যে ইলেকট্রন গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায় না। এই সকল অবস্থার পক্ষে উপযুক্ত বণ্টন সূত্র নির্ধারণের জন্য কণিকাবাদের যুগে পূর্বের ধারণা সংশোধিত হয়। প্রথমতঃ, কণিকাসমূহের পারস্পরিক অভিন্নতা স্বীকার করা হয়। তার ফলে কণিকার যে কোনও বণ্টনে দুই কণিকা পরস্পর স্থানবিনিময় করলে অন্য নূতন কোন বণ্টনের উদ্ভব হয় না। দ্বিতীয়তঃ, ১০.২ অংশে কল্পিত ষড়মাত্রিক আয়তনে* শক্তির সীমা ϵ ও $\epsilon+d\epsilon$ এর মধ্যে অবস্থিত কক্ষের আয়তন যদি $d\tau$ হয় তবে এই আয়তনে কেবলমাত্র $\frac{d\tau}{h^3}$ (h = প্লাঙ্কের ধ্রুবক) সংখ্যক কোষ থাকবে। এই কোষগুলির প্রতিটির সংগে কণিকার স্থানাঙ্ক, ভরবেগ-উপাংশ ইত্যাদির নির্দিষ্ট মান জড়িত, যার ফলে কোষগুলি পরস্পর থেকে বিভিন্ন। যে সকল কণিকার ক্ষেত্রে পাউলির অপবর্জন নীতি (Pauli's Exclusion Principle) প্রযোজ্য নয়, প্রতি কোষে সেরূপ কণিকা যে কোনও সংখ্যায় অবস্থিত হ'তে পারে। কিন্তু অপবর্জন নীতি পালনকারী কণিকার ক্ষেত্রে প্রতি কোষে সর্বাধিক একটি কণিকাই থাকা সম্ভব। এই দুই অবস্থায় যে দুই বিভিন্ন কণিকাবাদী বণ্টনসূত্র পাওয়া যায় সেগুলি যথাক্রমে **বসু-আইনস্টাইন** (Bose-Einstein) ও **ফার্মি-ডির‍্যাক** (Fermi-Dirac) বণ্টনসূত্র নামে পরিচিত।

বস্তুতঃ সকল প্রকার কণিকাই কণিকাবাদের নিয়ম অনুসরণ করে। সুতরাং প্রাক্-কণিকাবাদ পদ্ধতিতে নির্ণীত ম্যাক্সওয়েল-বোল্ৎস্মান সূত্র কখনই যথার্থ সূত্র হিসাবে পরিগণিত হ'তে পারে না। কণিকাবাদী পদ্ধতিতে যে দুই প্রকার

* কণিকার স্বকীয় কৌণিক ভরবেগ (intrinsic angular momentum) থাকলে এই আয়তনের আরও একটি মাত্রা যোগ হবে।

বণ্টনসূত্র পাওয়া যায় প্রত্যেক প্রকারের কণিকাই তার কোন একটিকে পালন করে। তবে সাধারণ গ্যাস সচরাচর যে উষ্ণতা ও ঘনত্বে থাকে, তাতে প্রতি কক্ষে অবস্থানকারী অণুর সংখ্যা কক্ষে যতগুলি কোষের স্থান সঙ্কুলান হয় তার সংখ্যা অপেক্ষা অনেক কম হয়। পরে দেখা যাবে যে এই অবস্থায় দুই কণিকাবাদী বণ্টনসূত্রই মোটামুটিভাবে ম্যাক্সওয়েল-বোল্ৎস্মান সূত্রের রূপ গ্রহণ করে। সুতরাং সাধারণ গ্যাসের ক্ষেত্রে ম্যাক্সওয়েল-বোল্ৎস্মান সূত্র যথার্থ না হ'লেও মোটামুটিভাবে ত্রুটিহীন ব'লে ধরে নেওয়া যায়।

(i) ম্যাক্সওয়েল-বোল্ৎস্মান (প্রাক-কণিকাবাদী) বণ্টন

ধরা যাক $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_r$ শক্তিবিশিষ্ট বিভিন্ন কক্ষের কণিকাসংখ্যা $n_1, n_2 \cdots, n_r$। মোট কণিকাসংখ্যা $\sum_j n_j = N$। N সংখ্যক কণিকার এই প্রকার বণ্টনের বিন্যাসাঙ্ক নির্ণয় করা যাক। প্রথম n_1 সংখ্যক কণিকা ${}^N C_{n_1}$ উপায়ে নির্বাচন করা যেতে পারে। অবশিষ্ট $(N-n_1)$ সংখ্যক কণিকার মধ্যে পরবর্তী n_2 সংখ্যক কণিকা নির্বাচন করা যায় ${}^{N-n_1}C_{n_2}$ উপায়ে। এইভাবে মোট বিন্যাসাঙ্ক

$$W = {}^N C_{n_1} \cdot {}^{N-n_1}C_{n_2} \cdots$$

$$= \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \cdot \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!} \cdots$$

$$= \frac{N!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

অথবা $\ln W = \ln(N!) - \Sigma \ln(n_j!)$ 10.3.1

$$= N \ln N - N - \Sigma(n_j \ln n_j - n_j)$$

(স্টার্লিং সূত্র* অনুসারে আসন্ন মান)

$$= N \ln N - \Sigma n_j \ln n_j \quad (\text{কেননা } N = \Sigma n_j) \qquad 10.3.2$$

W এর সর্বাধিক মানের ক্ষেত্রে $dW = 0$, সুতরাং $d(\ln W) = 0$।

10.3.2 থেকে, যেহেতু N ধ্রুবরাশি,

$$\Sigma(1 + \ln n_j)\, dn_j = 0 \qquad 10.3.3a$$

* স্টার্লিং (Stirling) সূত্র অনুসারে যদি $N >> 1$ হয় তবে

$$\ln N! = N \ln N - N$$

কণিকার মোট সংখ্যা $N=\Sigma n_j$ এবং মোট শক্তি $E=\Sigma n_j \epsilon_j$ উভয়ই ধ্রুবরাশি। সুতরাং

$$dN=\Sigma\, dn_j=0 \qquad 10.3.3b$$

$$\text{ও} \quad dE=\Sigma\, \epsilon_j\, dn_j=0 \qquad 10.3.3c$$

10.3.3 সূত্রত্রয়কে লাগ্রাঞ্জের অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ব্যবহার করে একত্রিত করা যায়:

$$\Sigma\,(1+ln\, n_j)dn_j+\alpha'\,\Sigma\, dn_j+\beta\,\Sigma\,\epsilon_j\, dn_j=0$$

অথবা $\quad \Sigma\,(ln\, n_j+\alpha+\beta\epsilon_j)\, dn_j=0 \qquad (\alpha'+1=\alpha)$

এই সূত্র α ও β এর যে কোনও মানের জন্য সিদ্ধ হ'তে হ'লে যৌগিকের প্রতিটি রাশির মানই শূন্য হবে। অতএব

$$ln\, n_j+\alpha+\beta\epsilon_j=0$$

$$\text{বা} \quad n_j=e^{-\alpha-\beta\epsilon_j} \qquad 10.3.4$$

α ও β ধ্রুবকদ্বয়ের মান নিম্নোক্ত উপায়ে নির্ণয় করা যায়। 10.3.4 অনুসারে

$$N=\Sigma\, n_j=e^{-\alpha}\,\Sigma\, e^{-\beta\epsilon_j}=fe^{-\alpha}$$

এখানে $\quad f=\Sigma\, e^{-\beta\epsilon_j}$ । 'f' কে 'গুরুত্ব-সমষ্টি' বলা যেতে পারে।

['f' কে ডারউইন (Darwin) ও ফাউলার (Fowler) 'partition function' ও প্লাঙ্ক 'Zustandsumme' (State-sum) বলেছেন।]

$$\text{এখন} \quad e^{-\alpha}=\frac{N}{f}, \text{ অথবা}$$

$$n_j=\frac{N}{f}\, e^{-\beta\epsilon_j} \qquad 10.3.5a$$

'β' এর মান বোল্‌ৎস্‌মান উপপাদ্যের সাহায্যে নিরূপণ করা যায়। 10.2.7 ও 10.3.2 সূত্র থেকে

$$\begin{aligned} S&=k\,(N\, ln\, N-\Sigma\, n_j\, ln\, n_j)+C' \\ &=k\,(N\, ln N-ln\, N\,\Sigma\, n_j+lnf\,\Sigma\, n_j+\beta\,\Sigma\, n_j\epsilon_j)+C' \\ &=k\,(N\, ln\, f+\beta E)+C' \end{aligned}$$

$$\text{এখন} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_v=k\left[\frac{N}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_v\left(\frac{\partial \beta}{\partial E}\right)_v+E\left(\frac{\partial \beta}{\partial E}\right)_v+\beta\right]$$

$$=k\beta$$

কেননা, $\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_v = \sum -\epsilon_j \, e^{-\beta\epsilon_j} = -\sum \epsilon_j \frac{f}{N} n_j = -\frac{f}{N} E$ ।

অপরপক্ষে তাপগতিবিদ্যার সূত্র $TdS = dE + pdV$ থেকে

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T}$$

অতএব, $k\beta = \frac{1}{T}$ অথবা $\beta = \frac{1}{kT}$

10.3.5*a* সূত্রকে এখন আরও সুনির্দিষ্ট করা যায় :

$$n_j = \frac{N}{f} e^{-\frac{\epsilon_j}{kT}} \qquad 10.3.6b$$

এই সূত্রই ম্যাক্সওয়েল-বোল্‌ৎস্‌মান সূত্র। f এর মান নির্ণয় করলে এই সূত্রকে অপেক্ষাকৃত সুপরিচিতরূপে লেখা যায়। অবস্থান-নির্দেশাঙ্ক $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$ ও $(z, z+dz)$ সীমার মধ্যে এবং ভরবেগ নির্দেশাঙ্ক (p_x, p_x+dp_x), (p_y, p_y+dp_y) ও (p_z, p_z+dp_z) সীমার মধ্যে অবস্থিত কণিকার সংখ্যা d^6n ধরা যাক। এরূপ ক্ষেত্রে 10.3.6*b* সূত্রকে লেখা যেতে পারে :

$$d^6n = \frac{N e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \, dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z}{f\, dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z} \qquad 10.3.7$$

ϵ কে এখানে নিরবচ্ছিন্ন (continuous) চলরাশি ধরা হ'য়েছে। একই কারণে f কে যোগের পরিবর্তে সমাকলনরূপে প্রকাশ করা যেতে পারে। অর্থাৎ

$$f\, dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z = \int\limits_{\substack{x,\, y,\, z \\ p_x,\, p_y,\, p_z}} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \, dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z$$

$$= \int\limits_{x,\, y,\, z} dx\, dy\, dz \int\limits_{p_x,\, p_y,\, p_z} e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} \, dp_x\, dp_y\, dp_z$$

$$= V(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \qquad [\, V = \text{মোট আয়তন} \,]$$

এই মান 10.3.7 সূত্রে ব্যবহার করা যেতে পারে। উপরন্তু

$$dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z = dV\, p^2 \sin\theta\, dp\, d\theta\, d\phi$$

(p = লব্ধ ভরবেগের পরিমাণ, θ ও ϕ = লব্ধ ভরবেগের নতাংশ ও দিগংশ নির্দেশক কোণদ্বয়) লিখলে এবং p ব্যতীত অপর সকল চলরাশির উপর 10.3.7 সূত্রের উভয় পার্শ্বের সমাকলন করলে পাওয়া যাবে

$$dn = \frac{Ne^{-\frac{\epsilon}{kT}}}{V(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}} \cdot V \cdot 4\pi p^2 dp$$

এখন $p^2 = 2m\epsilon$, $dp = \sqrt{2m} \cdot \frac{d\epsilon}{2\sqrt{\epsilon}}$ ব্যবহার করলে ϵ ও $\epsilon + d\epsilon$ সীমার মধ্যে শক্তিবিশিষ্ট অণুর সংখ্যা পাওয়া যাবে :

$$dN_\epsilon = \frac{2Ne^{-\frac{\epsilon}{kT}}}{\sqrt{\pi}(kT)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\epsilon}\; d\epsilon \qquad 10.3.8$$

এই সূত্র 4.5.1 সূত্রের অনুরূপ।

(*ii*) **কণিকাবাদী বণ্টন**

(ক) **বসু-আইনস্টাইন বণ্টন**

কণিকাবাদী বণ্টনের ক্ষেত্রে ϵ_j শক্তিবিশিষ্ট j-তম কক্ষে কোষের সংখ্যা c_j ধরা হবে। যে সকল কণিকা বসু-আইনস্টাইন বণ্টনসূত্র প্রতিপালন করে তাদের ক্ষেত্রে প্রতি কোষে যে কোনও সংখ্যক কণিকাই অবস্থিত হ'তে পারে।

c_j সংখ্যক কোষে মোট n_j সংখ্যক কণিকা বিন্যাসের সম্ভবপর উপায় গণনা করা যাক। $A_1, A_2, \ldots Ac_j$ দ্বারা c_j সংখ্যক কোষ ও $P_1, P_2, \ldots P_{nj}$ দ্বারা n_j সংখ্যক কণিকা সূচিত হবে।

$$(A_1P_2P_3)(A_2P_1P_4P_5)\ldots(A_{cj}\ldots)$$

শ্রেণীর দ্বারা কণিকাগুলির এক বিশেষ বিন্যাস নির্দেশ করা যায়। এই বিন্যাসে P_2P_3 কণিকা A_1 কোষে, P_1, P_4, P_5 কণিকা A_2 কোষে, এইরূপে অন্যান্য কণিকা অপরাপর কোষে অবস্থিত। A_1 থেকে A_{cj} এর যে কোনওটিকে প্রথমে রেখে মোট $c_j(n_j + c_j - 1)$! উপায়ে এরূপ একটি শ্রেণীকে লেখা যায় কেননা প্রথম চিহ্নটি স্থির থাকলে অপর $(n_j + c_j - 1)$ সংখ্যক চিহ্ন

$(n_j + c_j - 1)!$ উপায়ে স্থান-বিনিময় করতে পারে। তবে এইরূপে সৃষ্ট শ্রেণীগুলির প্রত্যেকটিই কোন নূতন বিন্যাস সূচিত করে না। n_j সংখ্যক কণিকা নিজেদের মধ্যে স্থানবিনিময় করে $n_j!$ উপায়ে বিন্যস্ত হ'তে পারে কিন্তু কণিকাগুলি অভিন্ন হওয়ায় এইরূপে লব্ধ $n_j!$ সংখ্যক শ্রেণী একই বণ্টন সূচিত করে। অনুরূপভাবে শ্রেণীর বন্ধনীভুক্ত অংশগুলি, যাদের সংখ্যা c_j, মোট $c_j!$ উপায়ে সজ্জিত হ'তে পারে এবং তার দ্বারাও নূতন কোন বিন্যাসের উদ্ভব হয় না। এইভাবে মোট

$$\frac{c_j(c_j + n_j - 1)!}{c_j!\, n_j!} = \frac{(c_j + n_j - 1)!}{(c_j - 1)!\, n_j!}$$

সংখ্যক উপায়ে j-তম কক্ষে n_j সংখ্যক কণিকা বিন্যস্ত হ'তে পারে। এইরূপে সকল কক্ষের হিসাব করলে পাওয়া যায়

$$\text{মোট বিন্যাসাঙ্ক } W = \prod_i \frac{(c_j + n_j - 1)!}{(c_j - 1)!\, n_j!}$$

অথবা, স্টার্লিং সূত্রের সাহায্যে,

$$\ln W = \sum_j [\ln(c_j + n_j - 1)! - \ln(c_j - 1)! - \ln n_j!]$$

$$= \sum_j [(c_j + n_j)\ln(c_j + n_j) - (c_j + n_j) - c_j \ln c_j + c_j - n_j \ln n_j + n_j]$$

$$(\because \; n_j \text{ বা } c_j >> 1)$$

$$= \sum_j [(c_j + n_j)\ln(c_j + n_j) - c_j \ln c_j - n_j \ln n_j] \quad 10.3.9$$

সাম্যাবস্থায় W এর সর্বাধিক মানের ক্ষেত্রে $d(\ln W) = 0$, সুতরাং

$$\sum_j \ln\left(1 + \frac{c_j}{n_j}\right) dn_j = 0 \quad (\because \; dc_j = 0) \qquad 10.3.10$$

কণিকার মোট সংখ্যা ও মোট শক্তি ধ্রুবরাশি হওয়ায় 10.3.3 b ও 10.3.3 c সূত্রদ্বয় এখানেও প্রযোজ্য। পূর্বের মত এই দুই সূত্রকে 10.3.10 এর সংগে একত্রিত ক'রে পাওয়া যায়

$$\sum \left[\ln\left(1 + \frac{c_j}{n_j}\right) - \alpha - \beta\epsilon_j\right] dn_j = 0$$

অথবা পূর্বের যুক্তি অনুযায়ী,

$$ln\left(1+\frac{c_j}{n_j}\right)-\alpha-\beta\epsilon_j=0$$

বা $$n_j=\frac{c_j}{e^{\alpha+\beta\epsilon_j}-1} \quad 10.3.11$$

10.3.11 সূত্রই বসু-আইনস্টাইন বণ্টনসূত্র। লক্ষ্যণীয় যে যেহেতু ϵ_j বিভিন্ন মান গ্রহণ করতে পারে এবং n_j কখনও ঋণাত্মক হ'তে পারে না, অতএব সর্বদাই $e^{\alpha}\geqslant 1$ হয়।

(খ) ফার্মি-ডিরাক বণ্টন

বসু-আইনস্টাইন সূত্রের সর্তের থেকে এই সূত্রের সর্তের প্রভেদ এই যে এক্ষেত্রে প্রতি কোষে মাত্র একটি কণিকাই অবস্থিত হ'তে পারে। c_j সংখ্যক কোষে n_j সংখ্যক কণিকা মোট

$$^{c_j}C_{n_j}=\frac{c_j\,!}{n_j\,!\,(c_j-n_j)\,!}$$

উপায়ে বিন্যস্ত হ'তে পারে। মোট বিন্যাসসংখ্যা এক্ষেত্রে

$$W=\prod_j\frac{c_j\,!}{n_j\,!\,(c_j-n_j)\,!}$$

স্টার্লিং সূত্রের সাহায্যে

$$ln\,W=\sum_j\left[\,c_j ln c_j-n_j ln n_j-(c_j-n_j)ln\,(c_j-n_j)\right] \quad 10.3.12$$

সর্বাধিক সম্ভাব্যতার ক্ষেত্রে $d(lnW)=0$, সুতরাং

$$\sum_j ln\left(\frac{c_j}{n_j}-1\right)dn_j=0 \quad (\because\ dc_i=0) \quad 10.3.13$$

পূর্বের মত 10.3.3 b ও 10.3.3 c সূত্রদ্বয়কে একত্র ক'রে

$$\sum_j\left[\,ln\left(\frac{c_j}{n_j}-1\right)-\alpha-\beta\epsilon_j\right]dn_j=0$$

সুতরাং পূর্বের যুক্তি অনুযায়ী

$$n_j=\frac{c_j}{e^{\alpha+\beta\epsilon_j}+1} \quad 10.3.14$$

10.3.14 সূত্র ফার্মি-ডিরাক বণ্টনসূত্র নামে পরিচিত।

10.3.11 ও 10.3.14 সূত্রদ্বয়কে পরীক্ষা করলে দেখা যায় যে যদি $c_i >> n_j$, অর্থাৎ $e^{\alpha} >> 1$ হয় তবে উভয় সূত্রই

$$n_j = \frac{c_j}{e^{\alpha + \beta \epsilon_j}} \qquad 10.3.15$$

রূপ লাভ করে। c_j উৎপাদক ব্যতীত এই সূত্র 10.3.4 অর্থাৎ ম্যাক্সওয়েল-বোল্ৎস্‌মান সূত্রের অনুরূপ। c_j এখানে বিভিন্ন শক্তিবিশিষ্ট কক্ষের 'পরিসংখ্যানগত গুরুত্ব' (statistical weight) হিসাবে ধরা যেতে পারে।

গ্যাসের প্রকৃতি নির্ধারণে e^{α} রাশিটির এক বিশেষ গুরুত্ব আছে। 'e^{α}' এর মান যত বেশী হয় গ্যাসের প্রকৃতি ততই প্রাক্-কণিকাবাদী সূত্র অনুধাবন করে। প্রাক্-কণিকাবাদী সূত্র থেকে গ্যাসের প্রকৃতির বিভিন্নতাকে গ্যাসের "অপচার" (degeneracy) বলা হয়। $e^{\alpha} > 1$, অথচ 1 এর সংগে তুলনীয় হ'লে সেই গ্যাস (অর্থাৎ কণিকাসমষ্টি) 'স্বল্পাপচারী' (weakly degenerate) নামে অভিহিত হয়। $e^{\alpha} \leqslant 1$ হ'লে গ্যাসকে অতি-অপচারী (strongly degenerate) বলা হয়। বসু-আইনস্টাইন বণ্টনসূত্র প্রতিপালনকারী গ্যাস এই অর্থে সর্বদাই স্বল্পাপচারী। ফার্মি-ডির‍্যাক গ্যাসের অপচার স্বল্প ও অধিক উভয়ই হ'তে পারে।

পূর্বালোচিত তিনটি বণ্টনসূত্রই নিম্নলিখিত উপায়ে একত্রে প্রকাশ করা যায়:

$$n_j = \frac{c_j}{e^{\alpha + \beta \epsilon_j} + \gamma}$$

যেখানে বসু-আইনস্টাইন সূত্রে $\gamma = -1$
ফার্মি-ডির‍্যাক সূত্রে $\gamma = +1$
ম্যাক্সওয়েল-বোল্ৎস্‌মান সূত্রে $\gamma = 0$

10.3.16

১০.৪ কোষসংখ্যা c_j এবং α ও β ধ্রুবকদ্বয়ের মান

c_j : ষড়্‌মাত্রিক নির্দেশতন্ত্রে (x, y, z, p_x, p_y, p_z) ϵ ও $\epsilon + d\epsilon$ শক্তিসীমাদ্বয়ের মধ্যে মোট আয়তন

$$V \cdot 4\pi p^2 dp$$
$$= 4\sqrt{2}\pi \, V m^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}} \, d\epsilon$$

একই নির্দেশতন্ত্রে প্রতি কোষের আয়তন

$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z = h^3$, কেননা কণিকাবাদের নীতি অনুযায়ী $\Delta x \cdot \Delta px = \Delta y \cdot \Delta py = \Delta z \cdot \Delta pz = h$ (h = প্লাঙ্ক-ধ্রুবক)

সুতরাং ϵ ও $\epsilon + d\epsilon$ শক্তিসীমাদ্বয়ের মধ্যে কোষসংখ্যা

$$c_j = \frac{4\sqrt{2}\pi V m^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon}{h^3} \qquad 10.4.1$$

β : 10.2.7 সূত্র থেকে

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = k \left[\frac{\partial}{\partial E}(ln\ W)\right]_V$$

কিন্তু, 10.3.16 সূত্র থেকে

$$d(ln\ W) \text{ বা } \sum ln\left(\frac{c_j}{n_j} - \gamma\right) dn_j$$

$$= \Sigma(\alpha + \beta\epsilon_j)dn_j$$

$$= \beta dE$$

অতএব, $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = k\beta$ ।

পূর্বে দেখা গেছে $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T}$, সুতরাং $\beta = \frac{1}{kT}$ 10.4.2

e^{α} : α বা e^{α} এর মানের জন্য $N = \Sigma n_j$ এই সম্পর্কের ব্যবহার প্রয়োজন । 10.3.16 থেকে

$$\Sigma n_j = \sum \frac{c_j}{e^{\alpha + \beta\epsilon_j} + \gamma}$$

'c_j' এর পূর্বানির্ণীত মান ব্যবহার ক'রে এই যোগফলের মান সমাকলন দ্বারা নির্ণয় করা যেতে পারে—

$$\sum n_j = \int_{\epsilon=0}^{\infty} \frac{4\sqrt{2}\pi V m^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon}{e^{\alpha + \beta\epsilon} + \gamma}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}\pi V m^{\frac{3}{2}} \beta^{-\frac{3}{2}}}{e^{\alpha} h^3} \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{e^{x} + \gamma e^{-\alpha}} \qquad (x = \beta\epsilon)$$

সমাকলনটিকে I দ্বারা চিহ্নিত করলে

$$e^{\alpha} = \frac{4\sqrt{2}\pi V(mkT)^{\frac{3}{2}}}{Nh^3} \cdot I \qquad 10.4.3$$

অনপচারী (non-degenerate) অর্থাৎ ম্যাক্সওয়েল-বোল্‌ৎস্‌মান গ্যাসের ক্ষেত্রে $\gamma = 0$, সুতরাং

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha} x^{\frac{1}{2}} dx = \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{এবং} \quad e^{\alpha} = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{nh^3} \quad \left(n = \frac{N}{V} = \text{কণিকার ঘনত্বসংখ্যা} \right) \qquad 10.4.4$$

e^{α} এর এই মানকে f_0 অভিহিত করা যাক।

স্বল্পাপচারী গ্যাসের ক্ষেত্রে যদি $e^{\alpha} >> 1$ হয় তবে

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{\gamma}{2^{\frac{3}{2}}} e^{-\alpha} + \frac{\gamma^2}{3^{\frac{3}{2}}} e^{-2\alpha} - \cdots \right]$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad e^{\alpha} = f_0 \left[1 - \frac{\gamma}{2^{\frac{3}{2}}} e^{-\alpha} + \frac{\gamma^2}{3^{\frac{3}{2}}} e^{-2\alpha} - \cdots \right]$$

e^{α} এর এই মান মোটামুটিভাবে f_0 এর সমান। সুতরাং বন্ধনীভুক্ত অংশের মধ্যে e^{α} এর পরিবর্তে f_0 ব্যবহার করে লেখা যায়—

$$e^{\alpha} = f_0 \left[1 - \frac{\gamma}{2^{\frac{3}{2}} f_0} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}} f_0^{\,2}} \right] \quad (\because \gamma^2 = 1) \qquad 10.4.5$$

বসু-আইনস্টাইন গ্যাসের চরম অপচারের ক্ষেত্রে $e^{\alpha} = 1$। এরূপ অবস্থায় $(\because \gamma = -1)$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} + \cdots \right] = 2{\cdot}612 \, \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad f_0 = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{nh^3} = \frac{1}{2{\cdot}612} \qquad 10.4.6$$

যে কোনও বসু-আইনস্টাইন গ্যাসের চরম অপচারী অবস্থায় (অর্থাৎ যখন $e^{\alpha} = 1$) কণিকার ঘনত্বসংখ্যা ও উষ্ণতার সম্পর্ক 10.4.6 সূত্র দ্বারা নির্দিষ্ট হয়।

অতি-অপচারী ফার্মি-ডির‍্যাক গ্যাসের ক্ষেত্রে $\gamma = 1$ এবং $e^{\alpha} << 1$। এই অবস্থায় α ঋণাত্মক, সুতরাং $-\alpha = a$ ধরা যাক। এখন

$$I = \Gamma(\tfrac{3}{2}) \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \, e^{\alpha} a^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\pi^2}{8a^2} + \cdots \right)$$

অর্থাৎ 10.4.3 অনুযায়ী

$$e^{\alpha}=f_0\frac{4}{3\sqrt{\pi}}e^{\alpha}a^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\pi^2}{8a^2}+\cdots\right)$$

বা $$\frac{3\sqrt{\pi}}{4f_0}=a^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\pi^2}{8a^2}+\cdots\right)$$

যেহেতু $a^2>>1$, মোটামুটিভাবে 'a' রাশির শুদ্ধ মান পাওয়া যায়

$$a_0=\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4f_0}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad 10.4.7$$

এবং এই মানের সাহায্যে লেখা যায়

$$a^{\frac{3}{2}}=a_0^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\pi^2}{8a_0^2}\right)^{-1}$$

বা $$a=a_0\left(1+\frac{\pi^2}{8a_0^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=a_0\left(1-\frac{\pi^2}{12a_0}\right) \qquad 10.4.8$$

10.4.7 ও 10.4.8 সূত্রদ্বয় থেকে এখন e^{α} এর মান পাওয়া যাবে।

১০.৫ বিভিন্ন গ্যাসের পরিসংখ্যানগত প্রকৃতি

বিভিন্ন প্রকার গ্যাসের ক্ষেত্রে e^{α} রাশির মান নিরূপণ ক'রে তাদের অপচারগত প্রকৃতি জানা যায়। e^{α} রাশিটি এই কারণে **'অপচার পরমিতি'** (degeneracy parameter) নামে অভিহিত হয়।

সাধারণ গ্যাসের ক্ষেত্রে $p=nkT$ সূত্রের সাহায্যে f_0 কে লেখা যেতে পারে—

$$f_0=\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}k^{\frac{5}{2}}}{h^3}\cdot\frac{m^{\frac{3}{2}}T^{\frac{5}{2}}}{p}$$

$$=1{\cdot}21\times10^{40}\cdot\frac{m^{\frac{3}{2}}T^{\frac{5}{2}}}{p}$$

সাধারণ চাপ ও উষ্ণতায় নাইট্রোজেন গ্যাসের ক্ষেত্রে $m=4{\cdot}65\times10^{-23}$ gm, $T=273°K$ ও $p=1{\cdot}01\times10^6$ dyne cm^{-2}, সুতরাং $f_0=4{\cdot}7\times10^6$। কাজেই $e^{\alpha}>>1$ এবং ম্যাক্সওয়েল-বোল্ৎস্‌মান সূত্র এখানে সুপ্রযোজ্য।

একই চাপে হিলিয়াম (He^4)4·24°K উষ্ণতাতেও গ্যাসীয় অবস্থাতে থাকে। পূর্বের সূত্র অনুযায়ী এই অবস্থায় $f_0 \simeq 7{\cdot}5$। এই মান 1 এর তুলনীয়, সুতরাং হিলিয়াম গ্যাসকে এই অবস্থায় অল্পাপচারী বলা যায়। অবশ্য He^4 গ্যাস বসু-আইনস্টাইন ও ফার্মি-ডির‍্যাক বণ্টনের কোনটি অনুসরণ করবে তা এ থেকে বলা যায় না।

আলোককণিকা বা ফোটনের (photon) সমষ্টির ক্ষেত্রে পাউলীর নীতি প্রযোজ্য নয়, তাই বসু-আইনস্টাইন বণ্টনসূত্রের সর্ত ফোটনগ্যাস প্রতিপালন করে। উপরন্তু, যেহেতু বিভিন্ন ভৌতিক ঘটনায় [যথা মন্দন-বিকিরণ (Bremsstrahlung), কণিকাযুগ্মের সৃষ্টি (pair creation)] ফোটন নিয়তই সৃষ্ট ও শোষিত হয়, ফোটনসমষ্টির ক্ষেত্রে $\Sigma\, dn_j = 0$ সর্ত আরোপ করা যায় না। এই কারণে 10.3.11 সূত্রে α ধ্রুবকের অনুপ্রবেশ ঘটে না এবং ফোটনের ক্ষেত্রে বণ্টনসূত্র এই রূপ গ্রহণ করে—

$$n_j = \frac{c_j}{e^{\epsilon_j/kT} - 1} \qquad 10.5.1$$

এক্ষেত্রে 'c_j' এর মান সহজেই নির্ণীত হ'তে পারে। ফোটনের ভরবেগ $p = \frac{h\nu}{c}$ (ν = ফোটনের কম্পাঙ্ক) ব্যবহার ক'রে এবং ফোটনের সমবর্তনের দুই দিক গণনা ক'রে

$$c_j = 2 \cdot \frac{4\pi p^2\, dp \,.\, V}{h^3} = \frac{8\pi V \nu^2\, d\nu}{c^3}$$

অতএব ν ও $\nu + d\nu$ এর মধ্যে যে সকল ফোটনের কম্পাঙ্ক, সেগুলির জন্য মোট শক্তির ঘনত্ব

$$n_\nu\, d\nu = \frac{h\nu \,.\, n_j}{V} = \frac{8\pi h\nu^3\, d\nu}{c^3\left(e^{h\nu/kT} - 1\right)} \qquad 10.5.2$$

এই বণ্টনসূত্র **'প্লাঙ্কের বিকিরণ সূত্র'** রূপে পরিচিত। ফোটনসমষ্টির ক্ষেত্রে $\alpha = 0$, বা $e^{\alpha} = 1$। বসু-আইনস্টাইন গ্যাসের ক্ষেত্রে এটিই e^{α} এর সর্বনিম্ন মান, সুতরাং ফোটনসমষ্টিকে বসু-আইনস্টাইন গ্যাসের চরম অপচারের উদাহরণ বলা যায়।

পাউলীর নীতি পালন করে এরূপ গ্যাসের উদাহরণ ইলেকট্রন-গ্যাস। ইলেকট্রনসমষ্টিকে সাধারণ গ্যাসের মত আধারে রাখা সম্ভব না হ'লেও

ধাতুর মধ্যে পরিবাহী ইলেকট্রনগুলি প্রায় সাধারণ গ্যাস অণুর মতই আচরণ করে। পরিবাহী ইলেকট্রনের সংখ্যা ধাতুপরমাণু পিছু 1 ধরলে মোটামুটি গণনায় $n = 10^{28}$ নেওয়া যেতে পারে। $300°K$ উষ্ণতায় $f_0 \simeq 10^{-4}$। যেহেতু $f_0 << 1$, এই অবস্থায় ইলেকট্রন গ্যাসকে অতি-অপচারী ফার্মি-ডিরাক গ্যাস বলা যায়।

কোন কণিকার পাউলীর নীতি পালন করা বা না করা কণিকার তরঙ্গ-অপেক্ষকের (wave-function) প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল। দেখা যায় যে যে সকল কণিকার স্বকীয় কৌণিক ভরবেগ $\frac{nh}{2\pi}$ (n = পূর্ণসংখ্যা) সেগুলি বসু-আইনস্টাইন বণ্টন প্রতিপালন করে। আলোককণিকা বা ফোটন $(n = 1)$, পাই (π) মেসন $(n = 0)$ এই জাতীয় কণিকা। অপরপক্ষে স্বকীয় কৌণিক ভরবেগ $(n + \frac{1}{2}) \frac{h}{2\pi}$ হ'লে সেরূপ কণিকা পাউলীর নীতি এবং সেই সংগে ফার্মি-ডিরাক বণ্টনসূত্র মেনে চলে। ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন (প্রতিটির জন্য $n = 0$) এরূপ কণিকার উদাহরণ। বণ্টনসূত্র অনুযায়ী প্রথম ও দ্বিতীয় প্রকার কণিকাকে যথাক্রমে **বোসন** (Boson) ও **ফার্মিয়ন** (Fermion) নামে অভিহিত করা হয়।

এই পুস্তকে ব্যবহৃত পরিভাষার তালিকা

অতিতাপিত—superheated
অতিশীতায়িত—supercooled
অনুবন্ধ—correlation
অন্তরক—dielectric
অন্তরকলন—differentiation
অন্তরণুক—intermolecular
অপকেন্দ্রন—centrifuging
অপচার—degeneracy
অপবর্জন নীতি—exclusion principle
অবাধপথ—free path
অবিন্যস্ততা—entropy
অপ্রতিমিত—unbalanced
অপ্রত্যাবর্তক—irreversible
অপ্রত্যাবর্তনযোগ্যতা—irreversibility
অর্ধশিরঃ কোণ—semi-vertical angle
অংশাঙ্কিত—calibrated
আন্তর্পরমাণুক—interatomic
আপেক্ষিকবাদী—relativistic
আভ্যন্তরীণ শক্তি—internal energy
আলোকমিতি—photometry
আসঞ্জন—cohesion
আস্রবণ—osmosis
আস্রবণপ্রসৃত চাপ—osmotic pressure
আয়তফলক—rectangular parallelopiped
আয়নীকরণ—ionisation
উৎক্ষেপণ—excitation
উন্নতি—gradient
উপযোজন গুণাংক—accommodation coefficient
উষ্ণতা—temperature
কেলাস—crystal
ক্রুশ-তার—cross-wire
গ্রাহিতা—susceptibility
গড় অবাধপথ—mean free path
ঘাতশ্রেণী—power series
ঘনীভবন—condensation
ছায়াঙ্কিত—shaded
ডোরা—fringe
তনুভবন—rarefaction
তন্ত্রগত ত্রুটি—systematic error
তরঙ্গ-অপেক্ষক—wave-function
তড়িৎদ্বার—electrode
তাপমাত্রা—scale of temperature
তুল্যাবস্থা—corresponding state
দিগংশ—azimuth
দৃঢ়—rigid
দ্বিপদসূত্র—binomial theorem
দ্বিমেরু শক্তি—dipole moment
নতাংশ—zenith distance
নিবিড়তা—density (of current)
নিরপেক্ষ উষ্ণতা—absolute temperature
পরামিতি—parameter
পরিচলন স্রোত—convection current
পরিবহণ—conduction
পরিবহণ-প্রক্রিয়া—transport phenomenon
পর্যায় (ডোরার)—order
পুনর্মিলন—recombination
পৃষ্ঠটান—surface teusion
প্রতিক্ষিপ্ত—recoil
প্রতিসাম্য—symmetry

প্রতিস্থাপন—substitution
প্রত্যাবর্তক—reversible
প্রভাব-গোলক—sphere of influence
প্রস্থচ্ছেদ—cross-section
প্রলম্বন—suspension
প্রায়োগিক—empirical
বণ্টন—distribution
বহির্মূল্যায়ন—extrapolation
বাষ্প—vapour
বাষ্পীভবন—vaporisation
বিক্ষেপণ—scattering
বেগবর্ণালি—velocity-spectrum
ব্যতিচার—interference
ব্যত্যয়—deviation
ব্যাপন—diffusion
ব্যাবর্তন—torsion
ব্যাবর্ত-তুলা—torsion-balance
ভ্রামক—moment
মন্দন-বিকিরণ—bremsstrahlung
মেরুপ্রবণতা—polarizability
মেরুৎপাদন—polarization (electric or magnetic)
যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক—mechanical equivalen
রাশিমালা—expression
রুদ্ধতাপ—adiabatic
লব্ধ—resultant
সচলতা—mobility
সমকেন্দ্রিক—concentric
সমদৈশিক—isotropic
সমবর্তন—polarization (optical)
সমবিভব—equipotential
সমস্থানিক—coincident
সমাকলন—integration
সমাক্ষ—coaxial
সম্পৃক্ত—saturated
সরণ—displacement
সংঘাত-পরামিতি—impact parameter
সংনমন—compression
সংযুতি—composition
সান্দ্রতা—viscosity
সাম্য—equilibrium
সূচক নিয়ম—exponential law
স্বকীয় কৌণিক ভরবেগ—intrinsic angular momentum
স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা—no. of degrees of freedom

গ্রন্থসূচী

এই পুস্তক রচনায় নিম্নলিখিত গ্রন্থসমূহের সাহায্য নেওয়া হয়েছে :

1. The Kinetic Theory of Gases—L. B. Loeb, New York, Dover Publications, 3rd. Ed., 1961.
2. A Treatise on Heat—M. N. Saha and B. N. Srivastava, 5th. Ed., Allahabad, Indian Press (Publishers) Pvt. Ltd, 1965.
3. The Dynamical Theory of Gases—J. H. Jeans, 4th Ed., Cambridge, Dover Publications, 1954.
4. Heat and Thermodynamics—J. K. Roberts, revised by A. R. Miller, 5th. Ed., Blackie & Son Ltd. 1960.
5. The Feynman Lectures on Physics—R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, Addison—Wesley Publishing Co., 1963.
6. The Nature of the Chemical Bond—Linus Pauling, 3rd. Ed., 1960, Cornell University Press.
7. Kinetic Theory of Gases—W. Kauzmann, New York, W. A. Benjamin, 1966.
8. Tables of Physical and Chemical Constants—G. W. C. Kaye and T. H. Laby (Now prepared under the direction of an Editorial Committee), 14th Ed., Longman, 1973.

পুস্তকে সন্নিবিষ্ট বিভিন্ন সারণী যতদূর সম্ভব শেষোক্ত নির্দেশগ্রন্থ থেকে সংকলিত হয়েছে। বিভিন্ন শব্দের বাংলা পরিভাষা (ক) চলন্তিকা অভিধান—রাজশেখর বসু (এম. সি. সরকার অ্যাণ্ড সন্‌স্‌ প্রাঃ লিঃ) (খ) সংসদ বাংলা অভিধান—সাহিত্য সংসদ ও (গ) বৈজ্ঞানিক পরিভাষা—কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় থেকে গৃহীত হ'য়েছে। বিদেশী বৈজ্ঞানিকদের নামের সঠিক উচ্চারণ নির্ণয়ে সম্ভবস্থলে Webster's Seventh New Collegiate Dictionary (Scientific Book Agency, 22, Raja Woodmunt St., Cal-1) অনুসরণ করা হয়েছে।

শুদ্ধিপত্র

পৃষ্ঠা	পংক্তি	আছে	হবে
১	১	পরিচয়	ইতিহাস
৪	১৭	সংঘর্ষে	সংঘর্ষে
১১	২৫	করে।	করে
১১	২৯	কঠিক	কঠিন
১৮	১৫	সাহাযে	সাহায্যে
২১	১২	শীর্ষে	শীর্ষে
২৭	৪	পতিপথে	গতিপথে
৩৯	১৬	$\phi(c^2)=\phi(\ldots)$	$\Phi(c^2)=\Phi(\ldots)$
৪২	৪	$+du$	$u+du$
৪৪	৫	এরস কল	এর সকল
৪৬	১	সংঘর্ষে	সংঘর্ষে
৫৪	৭	$c+dc\ldots c\hat{o}S$	$C+dC\ldots C\hat{o}S$
৫৫	১১	s_0	S_0
৬২	২	e^{-u_0/α^2}	$e^{-u_0^2/\alpha^2}$
৬২	২৩	ডিব্যাক	ডির‍্যাক
৬৬	১৯	p'	p_1
৬৭	১৩	c	C
৬৮	২২	অণুপাত	অনুপাত
৮০	১৫	∞	$\propto$
৮৫	১	৫.২	৫.১
৯৩	৯	গভিবেগ	গতিবেগ
৯৬	১	$-c^2/\alpha^2$	e^{-c^2/α^2}
১০০	৪	গতিবেগে	গতিবেগের
১০০	২৪	$\therefore$	$\because$
১০৩	৭	কম্পন	কম্পন
১০৬	২৪	গ্যাসের	গ্যাসের

পৃষ্ঠা	পংক্তি	আছে	হবে
১০৮	৮	$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\right]_T$	$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T\right]$
১০৯	২৫	বা O_2	বা CO_2
১১৪	১০	সমোষ্ণরেখার	সমোষ্ণরেখা
১১৪	১৫	উষ্ণতার	উষ্ণতায়
১২১	১৫	সূত্রসংখ্যা 7.7.3 হবে।	
১৩৯		চিত্র ৮.২ উল্টা আছে।	
১৪০	২২	Kv_1	KV_1
১৪০	২৪	Kv_2	KV_2
১৫২	২০	$R \sin \theta' \cos \phi$	$R \sin \theta' \cos \phi'$
১৭৮	২২	equivalen	equivalent